# Деление без зависти (и без дракона)



Докажем теорему Гейла.

$\Delta^{n-1}$ покрыт $A_i^j$

при фикс. $j$ • $\bigcup_i A_i^j = \Delta^{n-1}$

• $A_i^j$ не пересекает грань напротив вершин $i$

• $A_i^j$ ~~замкнут~~ открыты

заменим это условие на это

тогда $\exists\, x \in \Delta^{n-1}$, $\sigma \in S_n$

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} A^j_{\sigma(j)}$$

Для фикс. $j$ посмотрим на разбиение единицы

$f_i^j : \Delta^{n-1} \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции.

• $f_i^j \geqslant 0$, • $\sum_{i=1}^{n} f_i^j \equiv 1$ • $f_i^j(x) > 0$

$\Downarrow$

$x \in A_i^j$

Свойство: $f_i^j \equiv 0$ на грани $\Delta^{n-1}$, лежащей напротив вершины $i$.

Зададим $F_i(x) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_i^j(x)$.

$F_i$ обладает теми же свойствами: • $F_i \equiv 0$ на грани, лежащей напротив $i$

- $F_i \geqslant 0$
- $\sum_i F_i(x) \equiv 1$

Совокупность $(F_1, \dots, F_n)$ задаёт отображение

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \Delta^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longrightarrow & (F_1(x), \dots, F_n(x)) \end{array}$$

Но поскольку (согласно свойствам $F$) эта точка лежит в стандартном симплексе $\Delta^{n-1}$, мы имеем отображение

$$\Phi : \Delta^{n-1} \to \Delta^{n-1}.$$

Лемма $\deg \Phi = 1$.

Действительно, как и в лемме Шпернера, эту лемму мы докажем ~~на~~ индукцией по $n$, пользуясь леммой о степени отображений с краем.

Как и в лемме Шпернера, $\Phi$ переводит каждую грань $\Delta^{n-1}$ в себя, а на каждой грани у нас есть та же задача, ~~то~~ ~~делении без заботы, только для~~ только меньшей размерности. ∎

Из леммы вытекает, что прообраз каждой точки $\Delta^{n-1}$ непуст. В частности,

$$\exists x_0 : \ \Phi(x_0) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

Это значит (вернёмся к $f_i^j$), что

$$\forall j \qquad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_i^j(x_0) = \frac{1}{n}.$$

Кроме того, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^j(x_0) = 1.$

Мы имеем дважды стохастическую матрицу

$$M_0 := \left(f_i^j(x_0)\right) \in B_n$$ — многогранник Биркгофа.

Поскольку мы знаем вершины $B_n$, напишем

$$(*) \qquad M_0 = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma M_\sigma$$ — выпуклая комбинация, т.е. $\lambda_\sigma \geq 0$, $\sum \lambda_\sigma = 1$.

Пусть $\sigma$ такова, что $\lambda_\sigma > 0$.

Покажем, что разрез $x_0$ + перестановка $\sigma$ — искомые в теореме Гейла.

Без ограничение общности можно считать, что $\sigma = id$. $M_\sigma = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[illegible]

Из (*) и ~~положительности~~ неотрицательности всех чисел 

следует, что $f_i^i(x_0) \neq 0$.

Это значит, что при разрезе $x_0$ игрок № $i$ предпочитает кусок № $i$, а значит, мы поймали деление без зависти.

## Дракон, версия 1

Имеется $n-1$ гость. Гости делят торт на $n$ частей. Появляется дракон, и непредсказуемым образом забирает себе одну часть: Гости не знают предпочтения дракона.

Т Существует деление торта на $n$ частей, такое, что какую бы часть дракон не забрал, оставшиеся куски можно раздать гостям так, что гости не будут завидовать ни друг другу, ни дракону: каждый получит предпочитаемую часть.

Доказательство практически повторяет уже имеющееся.

Симплекс $\Delta^{n-1}$ покрыт $A_i^j$ $\forall j$. Только на сей раз $j = 1, .., n-1$, а $i = 1, \dots, n$.

Для каждого $j$ рассмотрим разбиение единицы:

$$f_i^j : \Delta^{n-1} \to \mathbb{R} \qquad \sum_i f_i^j \equiv 1$$

Зададим $F_i : \Delta^{n-1} \to \mathbb{R}$

$$F_i(x) = \sum_{j=1}^{n-1} f_i^j(x) \qquad \sum_{i=1}^{n} F_i(x) = n-1$$

Образуем отображение

$$\Phi : \Delta^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longrightarrow (F_1(x) \ldots F_n(x)) \in \Delta^{n-1} \cdot (n-1)$$

$\deg \Phi = 1$, и значит

$$\exists\, x_0 : F_i(x_0) = \frac{n-1}{n}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} f_1^1(x_0), & f_1^2(x_0) & \ldots & f_1^{n-1}(x_0) & \frac{1}{n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ f_n^1(x_0), & f_n^2(x_0) & \ldots & f_n^{n-1}(x_0) & \frac{1}{n} \end{pmatrix} -$$

дважды стохастическая матрица.

Запишем $M_0$ как выпуклую комбинацию вершин многогранника Биркгофа:

$$M_0 = \sum \lambda_\sigma M_\sigma \qquad , \sigma \in S_n$$

Поскольку в последнем столбце у $M_0$ все числа ненулевые,

$\forall i \quad \exists M_\sigma$ такая, что $\lambda_\sigma > 0$,

$$\text{и } M_\sigma = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ & & \vdots \\ & * & 1 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-я позиция} \\ \\ \\ \end{array}$$

~~То есть, $\forall i$ суще~~

То есть, для разреза $x_0$ верно: $\forall i$ удаление куска $N_i$ позволит распределить оставшиеся куски без зависти. ∎

## Дракон, версия 2



Имеется $n+1$ гость. Они делят торт на $n$ частей. После этого появляется дракон и съедает одного из гостей (какого именно — предсказать нельзя).

Требуется разделить торт так, чтобы независимо от того, кого именно заберёт дракон, оставшиеся гости распределят $n$ частей торта без зависти.

Утверждение: Это всегда возможно сделать.

Доказательство: Имеются предпочтения $A_i^j$, где $i = 1, \ldots, n$ ; $j = 1, \ldots, n+1$.

Построим для каждого $j$ разбиение единицы $f_i^j$,

и зададим $F_i(x) := \sum_j f_i^j(x)$.

Имеем отображение

$$\Phi : \Delta^{n-1} \longrightarrow \text{раздутый симплекс } \Delta^{n-1}$$

$$x \longmapsto (F_1(x), \ldots, F_n(x)).$$

Как и прежде, $\deg \Phi = 1$, и значит,

$$\exists\, x_0 : F_i(x_0) = \frac{n+1}{n}$$

Рассмотрим дважды стохастическую матрицу

$$M_0 = \begin{pmatrix} f_1^1(x_0), & \dots & f_1^{n+1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n^1(x_0) & \dots & f_n^{n+1}(x_0) \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

~~[illegible]~~ и повторим рассуждение из "версии 1".