

# Феномен мягкости в дифференциальной топологии

## Задачи к лекции 2:

### Векторные расслоения

26 июля 2022

**Задача 1.** Пусть  $p : E \rightarrow X$  — векторное расслоение ранга  $k$  над топологическим пространством  $X$ . Предположим,  $E$  имеет  $k$  линейно независимых сечений, то есть существуют непрерывные отображения  $s_1, \dots, s_k : X \rightarrow E$ , такие что  $p \circ s_1 = \dots = p \circ s_k = \text{Id}_X$  и для любой точки  $x \in X$  вектора  $s_1(x), \dots, s_k(x)$  линейно независимы в слое  $p^{-1}(x) \simeq \mathbb{R}^k$ . Докажите, что расслоение  $E$  изоморфно тривиальному.

**Задача 2.** а) Додокажите, что над окружностью  $S^1$  существует (с точностью до изоморфизма) всего два векторных расслоения ранга 1.

б) Сколько над  $S^1$  существует векторных расслоений ранга 2? ранга 3? ранга 179?

**Задача 3.** Покажите, что касательное расслоение к тору тривиально, а к сфере — нет.

Пусть  $M$  и  $N$  — многообразия размерности  $m$  и  $n$  соответственно, причём  $m < n$ . Отображение  $g : M \rightarrow N$  называется *погружением*, если дифференциал  $df(x)$  в каждой точке  $x \in M$  имеет ранг  $m$ . Послойное отображение  $F : TM \rightarrow TN$  называется *послойным мономорфизмом*, если на каждом слое оно инъективно.

**Теорема Смейла-Хирша.** Непрерывное отображение  $f : M \rightarrow N$  гомотопно погружению если и только если существует послойный мономорфизм  $F : TM \rightarrow TN$ , накрывающий  $f$ .

**Задача 4.** Докажите часть «только если» в теореме Смейла-Хирша.