Дубна-2022

Задачи Г.Б. Шабата к лекции 1

1.1. Плоские кубические кривые называют также *эллиптическими*, поскольку они возникли из попыток вычислить длину эллипса. Точнее было бы называть эллиптическими пространственные кривые, возникающие при вычислении длины эллипса $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1$ с помощью подстановок $X=a\cos\phi$, $Y=b\sin\phi$; тогда интегрировать надо

$$\mathrm{d}s := \sqrt{(\mathrm{d}X)^2+\mathrm{d}Y)^2} = \sqrt{a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi}\,\mathrm{d}\phi.$$

Введя $Z := \sqrt{a^2\sin^2\phi+b^2\cos^2\phi}$, получим уравнение 3-мерной *аффинной* сферы $X^2+Y^2+Z^2=a^2+b^2$, и "настоящая" эллиптическая кривая $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$ – её пересечение в 3-мерном (увы, *аффинном*) пространстве с *эллиптическим цилиндром* $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1$. Чтобы вычислить длину эллипса, на кривой $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$ надо проинтегрировать рациональный дифференциал $\mathrm{d}s = Z\mathrm{d}\left(\operatorname{arctg}\frac{aY}{bX}\right)$.

Введите $\mathbf{E}_{a,b}\subset\mathbf{P}_3(\mathbb{C})$ как *проективное замыкание кривой* $\dot{\mathbf{E}}_{a,b}$ и докажите, что $\mathbf{E}_{a,b}$ бирегулярно изоморфна плоской кубике. Совет. Воспользуйтесь *сплющенной* тригонометричесой параметризацией $X=a\frac{1-T^2}{1+T^2}$, $Y=\frac{2bT}{1+T^2}$, а затем подходящим дробно-линейным преобразованием. В какой интеграл на плоской кубике преобразуется длина исходного эллипса?

1.2. Пользуясь доступными компьютерными средствами, найдите вещественную плоскую кубику с тремя коллинеарными точками перегиба.

1.3. Пусть для некоторого $F\in\Bbbk[x_0:x_1:x_2]_3$ однородное уравнение $F=0$ задаёт *гладкую* плоскую кубику. Введём *гессиан* исходного многочлена $\mathrm{gess}F := \det\left(\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}\right)^2_{i,j=0}$. Очевидно, также и $\mathrm{gess}F\in\Bbbk[x_0:x_1:x_2]_3$. Докажите, что любое решение системы $[F=0]\wedge[\mathrm{gess}F=0]$ – точка перегиба кривой $F=0$.

1.4. Докажите рациональность *декартова листа*, заданного (в *аффинных координатах*) уравнением $y^2=x^3+x^2$. Совет. Изобразите декартов лист над $\mathbb{R}$, найдите на нём особую точку, и организуйте *проектирование* из неё. В качестве приложения найденной параметризации дайте строгое определение *петли* декартова листа и вычислите её площадь.

1.5. Докажите иррациональность кубики Ферма $x^3+y^3-z^3=0$. Совет. Проанализируйте то же уравнение в многочленах. Если не захочется делать это самостоятельно, загляните, например, в учебник И.Р. Шафаревича.