Задачи Г.Б. Шабата к лекции 2

2.1. Перечислите прямые на кубической поверхности, заданной в однородных координатах уравнением $xyz = w^3$.

2.2. Предложите гладкую кубическую поверхность $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}_3$, на которой лежит прямая ℓ_1, задаваемая достаточно простым уравнением. Рассмотрите множество плоскостей в $\mathbf{P}_3$, содержащих ℓ_1 и параметризуйте это множество точками $(s:t) \in \mathbf{P}_1$; обозначим $\Pi_{(s:t)}$ плоскость, соответствующую точке $(s:t)$. Очевидно равенство $\Pi_{(s:t)} \bigcap \mathbf{X} = \ell_1 \bigcup \mathbf{C}_{(s:t)}$, где $\mathbf{C}_{(s:t)}$ – *коника в* $\Pi_{(s:t)}$. Для скольких точек $(s:t) \in \mathbf{P}_1$ эта коника *вырождена*, то есть является *объединением двух прямых?* Сколько прямых на исходной кубике $\mathbf{X}$ вы в результате нашли?

2.3. Рассмотрите *диагональную поверхность Клебша* $\mathbf{X}$, определённую в $\mathbf{P}_4$ уравнениями

$$\sum_{i=0}^{4} x_i = \sum_{i=0}^{4} x_i^3 = 0.$$

Пусть $\alpha_\pm$–корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Убедитесь, что скрещивающиеся прямые

$$\ell_+ : x_0 + x_2 + \alpha_+ x_1 = \alpha_+ x_2 + x_1 + x_3 = \alpha_+ x_1 + \alpha_+ x_2 - x_4 = 0$$

и

$$\ell' : x_0 + x_2 + \alpha_- x_3 = x_2 + \alpha_- x_0 x_3 = \alpha_- x_0 + \alpha_- x_3 - x_4 = 0$$

лежат на $\mathbf{X}$. Изучите конфигурацию прямых, получаемых из $\ell_\pm$ чётными перестановками координат. Влияет ли характеристика основного поля на результат?

2.4. Пусть $\mathbf{X}$ – диагональная поверхность Клебша из предыдущей задачи. Найдите 27 вещественных прямых на $\mathbf{X}(\mathbb{R})$.

2.5. Покажите, что группа *бирегулярных* автоморфизмов диагональной поверхности Клебша изоморфна группе перестановок S_5. Найдя гладкую кубическую поверхность с меньшей группой автоморфизмов, сделайте вывод о существовании *бирегулярно неизоморфных гладких кубических поверхностей.*

2.6. Для произвольного числа $r \in \mathbb{Q}$ рассмотрите гладкую кубическую поверхность $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}_3$, заданную уравнением $x^3 + y^3 + z^3 = rw^3$. Найдя нетривиальные точки на $\mathbf{X}(\mathbb{Q})$, докажите классическую теорему (Райли, 1825): *любое рациональное число представимо как сумма кубов трёх рациональных чисел.* Подсказка. Почитайте книгу Ю.И. Манина "Кубические формы".