Кубики
Дубна, 2022

Лекция 1, 22 июля
Гиперповерхности. Кубические кривые.

Версия 24 июля 2022

1.0. Чем занимается алгебраическая геометрия?

Википедия: *Главным предметом изучения … алгебраической геометрии, … являются множества решений систем алгебраических уравнений.*

Формулировка архаическая, но для нашего курса вполне пригодная.

Её главный недостаток: *множества решений* предполагаются *вложенными* в аффинное или проективное пространство. Современная же алгебраическая геометрия занимается в основном *внутренними* свойствами своих объектов – многообразий, схем, стеков, …

Мы же в этом курсе будем заниматься именно <u>вложенными</u> многообразиями, причём, как вскоре будет объяснено, в определённом смысле **простейшими**.

Коэффициенты всех рассматриваемых уравнений будут предполагаться принадлежащими *основному полю* $\Bbbk$ (первая буква немецкого слова *Körper*[1]). Многие наши результаты не будут зависеть от основного поля; однако для их лучшего осознания полезно будет иметь в виду классические поля $\Bbbk = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_q$ и, особенно, их *алгебраические замыкания* $\Bbbk = \overline{\mathbb{Q}}, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}_q}$.

1.1. Проективные многообразия

1.1.0. Системы полиномиальных уравнений. Наряду с основным полем $\Bbbk$ мы будем иногда рассматривать поля $\mathbb{K} \supseteq \Bbbk$ и работать в проективных пространствах $\mathbf{P}_N(\mathbb{K})$ с <u>однородными</u> координатами $(x_0 : x_1 : \cdots : x_N)$. Обозначим (не вполне традиционно) пространство <u>однородных</u> многочленов от $(x_0, x_1, \ldots, x_N)$ с коэффициентами из $\Bbbk$

$$\Bbbk[x_0 : x_1 : \cdots : x_N]_d := \left\{ \sum_{i_0+\cdots+i_N=d} a_{i_0\ldots i_N} x_0^{i_0} \ldots x_N^{i_N} \middle| a_{i_0\ldots i_N} \in \Bbbk \right\}; \tag{1.1.0a}$$

мы будем рассматривать *системы однородных полиномиальных уравнений*

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ \ldots \\ F_{N-n} = 0 \end{cases}, \tag{1.1.0b}$$

где $F_i \in \Bbbk[x_0 : x_1 : \cdots : x_N]_{d_i}$.

Проективным многообразием можно было бы назвать множество решений[2]

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbb{K}) = \mathbf{zer}_{F_1,\ldots,F_{N-n}}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbf{P}_N(\mathbb{K})$$

системы уравнений (1.1.0b), но необходимо сделать несколько оговорок (к рассмотрениям нашего курса, в основном, не относящихся).

(a) Определение (1.1.0a) не запрещает $F_i = 0$, и с традиционной точки зрения "уравнение" 0=0 не влияет на множество $\mathbf{X}$. Однако нулевому многочлену нельзя разумно – то есть чтобы выполнялось $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$ приписать конечную степень, и обычно полагают $\deg(0) = -\infty$. Проще $F_i = 0$ запретить. Крайний случай

[1] Термин введён Р. Дедекиндом в 1871 году. Буквально он означает *тело* или *корпус* – нечто <u>целостное</u>, в случае числового множества – замкнутое относительно *четырёх арифметических операций.* В TeXе для основного поля зарезервирован специальный символ $\Bbbk$, однако многие авторы, как и в *до-теховские* времена, продолжают использовать просто k.

[2] Аргумент $(\mathbb{K})$ часто будет опускаться – либо когда ясен из контекста, либо когда неважен, либо когда $\mathbb{K} = \overline{\Bbbk}$. Вообще можно в течение всего курса считать, что $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ – но тогда, хотя упрощается геометрия, пропадает интересная арифметика.

$N = n$, то есть случай *пустого* множества уравнений, наоборот, будет разрешён – оно определяет прекрасное проективное многообразие $\mathbf{P}_N(\mathbb{K})$).

(б) Принятое нами обозначение $N - n$ количества уравнений объясняется тем, что *в общем положении* (скоро мы уточним это слова) $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}_N$ оказывается *$\underline{n}$-мерным подмногообразием степени* $\underline{d} := d_1 \dots d_{N-n}$ *в $\underline{N}$-мерном проективном пространстве*[3]. Обозначение тройкой чисел (n, N, d) главных инвариантов проективных многообразий представляется нам естественной. Так, предмет нашего курса связан с тройками $(n, N, d) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 3), (3, 4, 3), (4, 5, 3)\}$.

(в) Когда мы говорим об *общем положении* с точки зрения размерностей, мы подразумеваем, что уравнения системы $(1.1.0b)$ *логически независимы*. Действительно, если одно из уравнений системы, например, пропорционально линейной комбинации других, то его можно вычеркнуть.

(г) О размерности $\dim(\mathbf{X})$ можно уверенно говорить лишь в предположении *неприводимости* многообразия $\mathbf{X}$. В (основном для нас) случае *гиперповерхностей*, то есть $N = n + 1$, это условие равносильно условию *неприводимости* многочлена $F := F_1$.

(д) Обсуждаемое определение не исключает, например, уравнения $(x_1 - x_2)^3 = 0$. В случае $n = 1, N = 2$ его надо понимать как *уравнение трёхкратной прямой*, и нам такие уравнения понадобятся. Этот пример напоминает о том, что иногда надо различать *подмножества* проективного пространства, заданные системой уравнений $(1.1.0b)$, и определяемые ей <u>подсхемы</u>. Последние, впрочем, в нашем курсе будут фигурировать мало.

***

Выше было сказано *Проективным многообразием можно было бы назвать...* . Формально определение многообразия $\mathbf{X}$ через систему уравнений $(1.10b)$ верно. Однако тройка утверждений $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{P}_N$, $\dim \mathbf{X} = n$, $\deg \mathbf{X} = d$ выполняется не всегда. См. следующий подраздел.

1.1.1. Полные пересечения и гиперповерхности. Проективное <u>неприводимое</u> n-мерное многообразие $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{P}_N$ называется *полным пересечением*, если может быть задано $N - n$ уравнениями.

[3] Понятия *размерности* и *степени* неприводимого проективного многообразия над алгебраически замкнутым полем естественно определяются в терминах пересечений с *общими проективными подпространствами.*

Несмотря на кажущуюся естественность этого требования, полные пересечения обладают весьма специальными свойствами. Например, над $\Bbbk = \mathbb{C}$ все полные пересечения размерности, большей 1, *односвязны.* Общие гладкие кривые являются полными пересечениями лишь для родов 0,1,3,4.

В этом курсе мы занимаемся *гиперповерхностями.* В принятых обозначениях это означает, что $N = n+1$, а многообразие $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}_{n+1}$ задаётся одним уравнением $F_1 = F \in \left(\Bbbk[x_0 : \cdots : x_n : x_{n+1}]_d\right) \setminus \{0\}$. Такое многообразие неприводимо тогда и только тогда, когда неприводим (не является произведением многочленов меньших степеней) многочлен F, и, в частности, *однократно* (не требует привлечения теории схем), если многочлен F – не степень многочлена меньшей степени.

1.1.2. Пространства гиперповерхностей. Для понимания геометрии конкретных поверхностей данной размерности и степени важно рассмотреть их все.

Утверждение. *Размерность пространства однородных многочленов степени* $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ *от* $N+1 \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ *переменной вычисляется по формуле*

$$\dim_{\Bbbk} \Bbbk[x_0 : \cdots : x_N] = \binom{N+d}{d}.$$

Доказательство. Эти размерности при небольших d и N могут быть определены, например, прямым подсчётом одночленов. Мы собрали результаты в таблицу, выделив жирным шрифтом размерности, рассматриваемые в нашем курсе (то есть при $d = 3$).

$d \backslash N$	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	6
2	3	6	10	15	21
3	**4**	**10**	**20**	**35**	**56**
4	5	15	35	70	126
5	6	21	56	126	252

Таблица оказалась фрагментом повёрнутого на 45° *треугольника Паскаля.* Это объясняется равенствами

$$\dim \Bbbk[x_0 : x_1]_d = d+1,$$

$$\dim \Bbbk[x_0 : x_1 \cdots : x_N]_1 = N+1,$$

и определёнными для $d, N \geq 2$ изоморфизмами

$$\Bbbk[x_0 : x_1 \cdots : x_N]_d \cong \Bbbk[x_0 : x_1 \cdots : x_{N-1}]_d \oplus x_N \Bbbk[x_0 : x_1 \cdots : x_N]_{d-1}$$

(первое слагаемое в правой части порождается одночленами, не делящимися на x_N, а второе – делящимися).■

Следствие. *Множество n-мерных гиперповерхностей степени d над $\Bbbk$ находится во взаимно однозначном соответствии с точками проективного пространства* $\mathbf{P}_{\binom{n+1+d}{d}-1}(\Bbbk)$.

Действительно, мы договорились, что однородные многочлены F, задающие гиперповерхности $\mathbf{X}$, отличны от 0. При этом уравнение $F=0$ определено с точностью до умножения на ненулевую константу, то есть

$$F \in \frac{\Bbbk[x_0:\cdots:x_{n+1}]_d \setminus \{0\}}{\Bbbk^\times} =: \mathbf{P}\Bbbk[x_0:\cdots:x_{n+1}]_d. \blacksquare$$

Применение. Теперь мы можем дать точное определения выражениям вроде *общая гиперповерхность*. Свойство $\mathcal{P}$ гиперповерхности, соответствующей точке пространства $\mathbf{P}\Bbbk[x_0:\cdots:x_{n+1}]_d$ объявляется присущим *общей гиперповерхности* , если оно нарушается лишь точках, соответствующих многообразию меньшей размерности. Например, *общая гиперповерхность* (данной степени и размерности) *гладка*.

1.1.3. О классификации. Какие два проективные многообразия $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{P}_N(\Bbbk)$ и $\mathbf{X}' \subseteq \mathbf{P}_{N'}(\Bbbk)$ можно считать *одинаковыми?* Лишь размерность $n = \dim \mathbf{X} = \dim \mathbf{X}'$ – несомненный инвариант. Мы рассмотрим три отношения эквивалентности (для знатоков: *определённых над* $\overline{\Bbbk}$); для одного из них нам потребуется группа *проективных линейных преобразований*

$$\mathsf{PGL}_N(\mathbb{K}) := \frac{\mathsf{GL}_{N+1}(\mathbb{K})}{\mathbb{K}^\times}$$

– она естественно действует на проективном пространстве $\mathbf{P}_N(\mathbb{K}) := \frac{\mathbb{K}^{N+1}\setminus\{0\}}{\mathbb{K}^\times}$.

• Самое тонкое отношение *проективной* эквивалентности определяется при дополнительном предположении $N'=N$. По определению

$$\mathbf{X}' \approx_{\mathrm{proj}} \mathbf{X} :\Longleftrightarrow \exists T \in \mathsf{PGL}_N(\overline{\Bbbk}); T\cdot \mathbf{X}' = \mathbf{X}.$$

• Промежуточное отношение *бирегулярной* эквивалентности определяется без дополнительных предположений и является, видимо, наиболее естественным. По определению,

$$\mathbf{X}' \approx_{\mathrm{bireg}} \mathbf{X} :\Longleftrightarrow \exists \varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}', \varphi' : \mathbf{X}' \to \mathbf{X}, \varphi\circ\varphi' = \mathrm{id}_{\mathbf{X}'},\ \varphi'\circ\varphi = \mathrm{id}_{\mathbf{X}}.$$

Здесь

$$\varphi = (\varphi_0:\cdots:\varphi_{N'}) : \mathbf{P}_N(\overline{\Bbbk}) \dashrightarrow \mathbf{P}_{N'}(\overline{\Bbbk})$$

и

$$\varphi' = (\varphi'_0 : \cdots : \varphi'_{N'}) : \mathbf{P}_{N'}(\overline{\Bbbk}) \dashrightarrow \mathbf{P}_N(\overline{\Bbbk})$$

– *почти*-отображения, компоненты которых – рациональные функции, и потому отображения определены лишь вне пересечений нулей знаменателей этих компонент; они, однако, обязаны быть всюду определёнными на $\mathbf{X}$ и на $\mathbf{X}'$.

• Самое грубое отношение *бирациональной* эквивалентности определяется при дополнительном предположении о *неприводимости* многообразий $\mathbf{X}$ на $\mathbf{X}'$. Можно просто модифицировать предыдущее определение:

$$\mathbf{X}' \approx_{\text{birat}} \mathbf{X} :\Longleftrightarrow \exists \varphi : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{X}', \varphi' : \mathbf{X}' \dashrightarrow \mathbf{X}, \varphi \circ \varphi' \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{X}'},\ \varphi' \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{X}}.$$

Отличие бирационального изоморфизма от бирегулярного заключается в том, что теперь отображения φ и φ' могут быть определены лишь *почти всюду*, то есть вне многообразия меньшей размерности. Аналогичный смысл приобретает и отношение $\simeq$ на множестве рациональных почти-функций: оно означает равенство вне многообразия меньшей размерности.

Приведённое определение бирационального изоморфизма громоздко и неуклюже, но является наиболее фундаментальным и будет играть основную роль в нашем курсе. Можно дать более концептуальное определение: с каждым многообразием $\mathbf{X}$ связывается *поле почти-функций* $\overline{\Bbbk}(\mathbf{X})$ на этом многообразии. Оказывается, $\mathbf{X}' \approx_{\text{birat}} \mathbf{X}$ *тогда и только тогда, когда* $\boxed{\overline{\Bbbk}(\mathbf{X}) \simeq_{\overline{\Bbbk}} \overline{\Bbbk}(\mathbf{X}')}$; последний *изоморфизм над* $\Bbbk$ означает, что существует изоморфизм

$$\iota : \overline{\Bbbk}(\mathbf{X}) \xrightarrow{\simeq} \overline{\Bbbk}(\mathbf{X}'),$$

тождественный на $\overline{\Bbbk}$

$$\iota\big|_{\overline{\Bbbk}} = \mathrm{id}_{\overline{\Bbbk}}$$

(подразумеваются вложения $\overline{\Bbbk} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}(\mathbf{X})$ и $\overline{\Bbbk} \hookrightarrow \overline{\Bbbk}(\mathbf{X}')$ как постоянные функции среди почти-функций).

Таким образом, задача бирациональной классификации проективных многообразий (даже не обязательно полных пересечений) сводится к чисто алгебраической задаче классификации *конечно-порождённых расширений алгебраически замкнутого поля*, см. [**Шафаревич1988**].

Остаётся привести примеры, различающие введённые отношения эквивалентности. Ограничимся гиперповерхностями.

Бирегулярно изоморфные, но проективно не эквивалентные гиперповерхности. Таких примеров существует всего три класса, см. [**Kollar2019**]. Первый из них был, возможно, известен древним вавилонянам, а в наше время называется *рациональной параметризацией окружности*. Во введённых обозначениях *прямая* $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}_2$ задаётся уравнением $x_3 = 0$, а *окружность* $\mathbf{X}' \subset \mathbf{P}_2$ – уравнением $x_1'^2 + x_2'^2 - x_0'^2 = 0$. Изоморфизм $\varphi : \mathbf{X} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{X}'$ задаётся формулами[4]

$$x_0' = x_1^2 + x_2^2,\ x_1' = x_1^2 - x_2^2,\ x_2' = 2x_1x_2.$$

Второй класс примеров (непроективные изоморфизмы плоских кубик) мы подробно обсудим вскоре. Третий класс (непроективные изоморфизмы пространственных квартик) находится вне пределов наших рассмотрений.

Тригонометрическая параметризация окружности – не совсем честный пример, поскольку одно из проективных многообразий лежит в подпространстве меньшей размерности. Безупречный пример не проективного бирегулярного изоморфизма (вместе с кратким историческим обоснованием) предлагается разобрать в задаче **1.1**; речь в ней идёт об изоморфизмах между плоскими кубиками и пересечениями пространственных квартик.

Бирационально, но не бирегулярно изоморфные гиперповерхности. Простейшим примером является *стереографическая проекция*. Читателю предоставляется возможность продумать детали над алгебраически замкнутым полем.

Отметим, что упомянутая выше тригонометрическая параметризация коники представляет собой стереографическую проекцию в размерности 1. В отличие от своих многомерных аналогов, она бирегулярна.

Многообразие, бирационально изоморфное проективному пространству $\mathbb{P}_n$, называется *рациональным*. Большой запас рациональных многообразий, не (бирегулярно) изоморфных проективной плоскости, доставляют кубические поверхности, которым мы посвятим лекцию 2.

Проблема рациональности кубик является из одной центральных проблем теории кубик, и мы постараемся уделить ей достаточное внимание.

[4]...представляющими собой *проективизацию* тригонометрической параметризации окружности $x^2 + y^2 = 1$ формулами $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$.

1.1.4. Классы проективной эквивалентности кубик. Выше в разделе **1.1.2** мы описали множество всех гиперповерхностей данной размерности и степени. Ограничимся рассмотрением размерностей пространств кубик.

Как мы знаем, в случае кубик $d = 3$, и

$$\dim \left(\mathbf{P}\Bbbk[x_0 : \cdots : x_{n+1}]\right)_3 = \binom{n+4}{3} - 1 = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6} - 1.$$

В интересующих нас случаях эти размерности таковы:

n	$\dim \left(\mathbf{P}\Bbbk[x_0 : \cdots : x_{n+1}]\right)_3$
1	9
2	19
3	34
4	55

Для каждого из $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ на соответствующих проективных пространствах действуют проективные группы PGL_{n+1} размерностей $(n+2)^2 - 1 = n^2 + 4n + 3$. Это приводит к таблице

n	$\dim \frac{\mathbf{P}\Bbbk[x_0 : \cdots : x_{n+1}]\big)_3}{\mathsf{PGL}_{n+1}(\Bbbk)}$
1	**1**
2	4
3	10
4	20

Очевидно, на простой интуитивный смысл нужно рассчитывать лишь при $n = 1$ и, возможно, при $n = 2$.

1.2. Кубические кривые

1.2.0. Переобозначения. Общее уравнение плоской кубики:

$$\sum_{i_0+i_1+i_2=3} a_{i_0 i_1 i_2} x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2} = 0$$

После очевидных переобозначений переписываем его в виде

$$\sum_{i+j+k=3} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$$

Конец лекции 22.7.22******************

и располагаем слагаемые в строки по степеням x:

$$\begin{gathered}
a_{300}x^3+\\
+a_{210}x^2y+a_{201}x^2z+\\
+a_{120}xy^2+a_{111}xyz+a_{102}xz^2+\\
+a_{030}y^3+a_{021}y^2z+a_{012}yz^2+a_{003}z^3=0
\end{gathered}$$

Здесь $(a_{300} : \cdots : a_{003}) \in \mathbf{P}_9(\Bbbk)$. Одна из задач – пользуясь 8-мерной группой $\mathsf{PGL}_2(\Bbbk)$, подобрать координаты для наиболее компактного вида.

1.2.1. Ньютон и перегибы. Плоские кубики – хобби Ньютона, см. [**Newton1704**]. Одно из его фундаментальных открытий – *коллинеарность точек перегиба.* Это – наша интрига. Эксперименты? См. задачу **1.2**.

Но наличие точек перегиба гладкой кривой (в следующем подразделе обсудим, что это значит) обосновывается и теоретически, с помощью *гессиана.* См. задачу **1.3**.

1.2.2. Гладкость и иррациональность. Гладкость плоской алгебраической кривой (напомним, над произвольным полем $\mathbb{K} \supseteq \Bbbk$) можно определить двумя способами – с помощью частных производных, как в анализе, и в терминах пересечения кривой со *всевозможными* прямыми.

Язык частных производных проще, но следует иметь в виду, что над полями положительной характеристики производные иногда ведут себя патологически. Читатели, склонные ограничиться геометрией над $\mathbb{C}$, могут полностью довериться интуиции, развитой при работе с плоскими кривыми в анализе.

Остальным читателям предоставляется возможность самим дать определение *особой точки* плоской кубики. Можно начать с решения задачи **1.4** (заимствованной из самого начала учебника [**Шафаревич1988**]). Затем можно предложить построить полную классификацию возможных взаимных расположений кубик и прямых.

Теорема. *Неприводимая плоская кубика рациональна тогда и только тогда, когда особа.*

Замечание. Мы потребовали неприводимость кубики, чтобы избежать обсуждения патологических случаев, например, *тройной прямой* – кто-то может счесть её касательной к самой себе.

На самом деле теория приводимых кубик – это теория объединений коник и прямых, и мы считаем эту теорию тривиальной (и сильно вырожденной: в пространстве $\mathbf{P}_9$ плоских кубик приводимые занимают всего лишь $\mathbf{P}_{2+5}$ – 7-мерное подпространство).

Набросок доказательства. Тем, кто овладел геометрическим содержанием понятия особой точки, очевидно, что *проекция* *из особой точки плоской кубики задаёт её рациональную параметризацию.*

Утверждение об *иррациональности гладкой кубики* несколько труднее. Его осознание разумно начать с какой-нибудь конкретной кубики – например, с *кубики Ферма*

$$x^3 + y^3 - z^3 = 0.$$

Из её рациональности следовала бы разрешимость того же уравнения в *непостоянных рациональных функциях* $X, Y, Z \in \Bbbk(t)$, а после умножения на общий знаменатель – и в непостоянных многочленах $X, Y, Z \in \Bbbk[t]$. Однако последняя неразрешимость элементарно устанавливается рассмотрением степеней, см. задачу **1.5**.

Приведём также *трансцендентное* доказательство иррациональности произвольной гладкой кубики $\mathbf{X} \subset \mathbf{P}_2(\mathbb{C})$. Оно имеет смысл только над $\mathbb{C}$, зато кратко. Пусть $X, Y, Z \in \mathbb{C}[t]$ задают изоморфизм $(X : Y : Z) : \mathbf{P}_1(\mathbb{C}) \to \mathbf{X}$. Этот изоморфизм поднимается на *универсальные накрывающие*:

$$\widetilde{(X : Y : Z)} : \widetilde{\mathbf{P}_1(\mathbb{C})} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{X}}$$

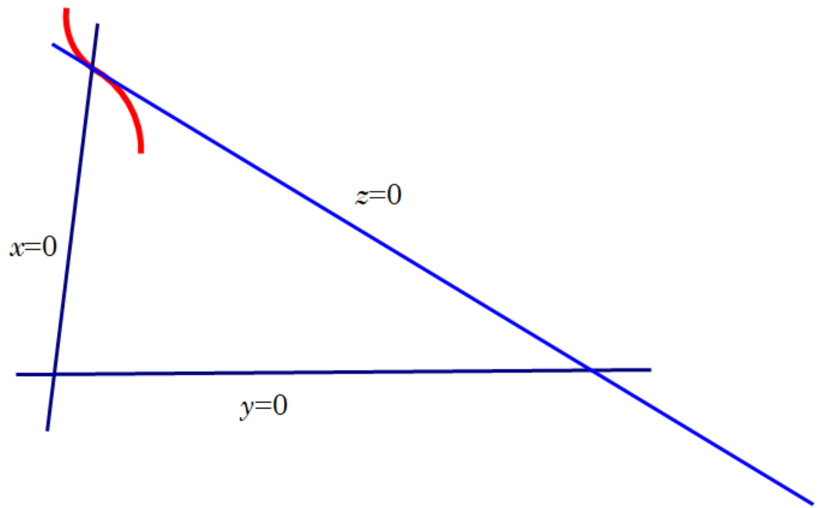
или, поскольку риманова сфера $\mathbf{P}_1(\mathbb{C})$ односвязна, а комплексная кривая $\mathbf{X}$ гомеоморфна тору и биголоморфно эквивалентна *фактору* $\mathbb{C}$ *по решётке*, получаем

$$\widetilde{(X : Y : Z)} : \mathbf{P}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C},$$

а такое отображение постоянно, например, по теореме Лиувилля. ■

1.2.3. Форма Тейта. Из подраздела 1.2.1: *хотя бы одна точка перегиба.* (Это – ослабление требования $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$). Аналог для $n = 2$ см. в лекции 2.

<u>От 10 коэффициентов к 7.</u> Выберем ось $z = 0$ в качестве прямой перегиба, а точку $(0 : 1 : 0)$ – точкой перегиба на ней.



Уравнение из (1.2.0) преобразуется к виду

$$a_{111}xyz + a_{021}y^2z + a_{012}yz^2 = -a_{300}x^3 - a_{201}x^2z - a_{102}xz^2 - a_{003}z^3 \qquad (1.2.3a)$$

<u>Переход к аффинной кривой</u>. Обозначим

$$O := (0:1:0) \qquad (1.2.3b)$$

и будем называть ей *бесконечной* точкой.

Тогда

$$\mathbf{X} =: \dot{\mathbf{X}} \coprod \{O\} \qquad (1.2.3c)$$

где $\dot{\mathbf{X}}$ – *аффинная* кривая ($z := 1$ в (1.2.3a)):

$$a_{111}xy + a_{021}y^2 + a_{012}y = -a_{300}x^3 - a_{201}x^2 - a_{102}x - a_{003} \qquad (1.2.3d)$$

<u>От 7 коэффициентов к 5</u>. Заметим, что $a_{021} \neq 0$ (иначе $y \in \Bbbk(x)$) и $a_{300} \neq 0$ (иначе степень уравнения (1.2.3d) равна 2, а не 3). Поэтому (пользуемся $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$!) найдутся такие преобразования $x \leftarrow \lambda x$ и $y \leftarrow \mu y$, что

$$a_{012} = 1 \text{ и } a_{300} = -1 \qquad (1.2.3e)$$

Уравнение (1.2.3d) принимает вид

$$y^2 + a_{111}xy + a_{012}y = x^3 - a_{201}x^2 - a_{102}x - a_{003} \qquad (1.2.3f)$$

Рекомендуются переобозначения коэффициентов, в результате которых уравнение (1.2.3f) превратится в

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \qquad (1.2.3g)$$

– это и есть *уравнение Тейта*, см. [**Silverman2009**], стр. 42. Читателю предоставляется возможность догадаться о смысле номеров коэффициентов.

1.2.4. Форма Вейерштрасса. Для работы с кубическими кривыми над произвольными полями рекомендуется форма Тейта. При слабых ограничениях на характеристику основного поля эта форма допускает дальнейшие обобщения.

Если $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$, то преобразование $y \leftarrow y - \frac{a_1x}{2}$ приводит уравнение (1.2.3g) приводится к виду

$$y^2 + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \qquad (1.2.4a).$$

Далее, если $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$, то преобразование $y \leftarrow y - \frac{a_3}{2}$ приводит уравнение (1.2.3g) приводится к виду

$$y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 \qquad (1.2.4b).$$

Наконец, если $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 3$, то преобразование $y \leftarrow x - \frac{a_2}{3}$ приводит уравнение (1.2.3g) приводится к виду

$$y^2 = x^3 + a_4x + a_6. \qquad (1.2.4c)$$

Такое уравнение и называется (иногда) *уравнением кубической кривой в форме Вейерштрасса.* С ним уже довольно удобно работать. От 8-мерной группы $\mathsf{PGL}_2(\Bbbk)$, действовавшей на 9-мерном пространстве коэффициентов исходного уравнения, осталась группа $\Bbbk^\times$, действующая на паре коэффициентов (a_4, a_6) по формуле

$$\lambda \cdot (a_4, a_6) := (\lambda^4 a_4, \lambda^6 a_6). \qquad (1.2.4d)$$

Избавиться от этого действия уже нельзя (*функтор семейств кривых рода 1 не представим*).

Простая перенормировка ($\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$!) приводит к ещё одной форме

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3, \qquad (1.2.4e)$$

которая тоже называется *уравнением кубической кривой в форме Вейерштрасса* и вскоре будет объяснена; она естественна лишь над $\mathbb{C}$.

1.2.5. Топология комплексных кубических кривых. Если кубическая кривая задана уравнением в форме Вейерштрасса, то её топологию легко понять с помощью проекции $(x, y) \mapsto x$.

КАРТИНКА!

Любая гладкая кубика $/\mathbb{C}$ *гомеоморфна тору.*

1.2.6. Униформизация комплексных кубических кривых. Классификация односвязных 1-мерных комплексных многообразий (*теорема Римана*) и простые соображения о коммутирующих элементах группы $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{R})$ приводят к убеждению в том, что *универсальная накрывающая* $\widetilde{\mathbf{X}(\mathbb{C})}$ *кубики* $\mathbf{X}(\mathbb{C})$ *биголоморфно эквивалентна* $\mathbb{C}$. Иначе говоря,

$$\mathbf{X}(\mathbb{C}) \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \tag{1.2.6a}$$

где Λ – подходящая *решётка, то есть дискретная подгруппа ранга 2 аддитивной группы* $\mathbb{C}^+$*, а под* $\simeq$ *понимается биголоморфный изоморфизм.*

Предъявим конструкцию изоморфизма (1.2.6a) в обе стороны.

Справа налево. Пусть дана решётка $\Lambda \subset \mathbb{C}$; обозначим $\dot{\Lambda} := \Lambda \setminus \{0\}$. Далее будем опускать явное указание зависимости рассматриваемых объектов от Λ в том же духе, в котором опускаем зависимость нашей кубики $\mathbf{X}$ от a_4, a_6 в уравнении Вейерштрасса (1.2.4c).

Введём для $k \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ *ряды Эйзенштейна*

$$G_k := \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \frac{1}{\lambda^{2k}} \tag{1.2.6b}$$

и *функцию Вейерштрасса*

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \dot{\Lambda}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right). \tag{1.2.6c}$$

Её производная имеет более простой вид

$$\wp'(z) := -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}, \tag{1.2.6c}$$

и выполняется *дифференциальное уравнение Вейерштрасса*

$$\boxed{\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3} \tag{1.2.6d}$$

где

$$g_2 = 60G_2, g_3 = 140G_3. \tag{1.2.6e}$$

Дифференциальное уравнение Вейерштрасса и объясняет несколько странный вид уравнения (1.2.4e).

Слева направо. Для кривой

$$\mathbf{X}: \; y^2 = x^3 + ax + b$$

надо подобрать решётку Λ обеспечивающую изоморфизм $\mathbf{X} \simeq \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$. Подходит *решётка периодов*

$$\boxed{\Lambda := \oint_{\mathrm{H}_1(\mathbf{X},\mathbb{Z})} \frac{\mathrm{d}x}{y}} \tag{1.2.6f}$$

Под именем *эллиптических интегралов* неберущиеся интегралы

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3 + ax + b}}$$

изучались с 18 века.

Важнейший (в том числе как прототип многомерных аналогов) изоморфизм $\mathbf{X} \xrightarrow{\cong} \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$ задаётся формулой

$$\boxed{P \mapsto \int_O^P \frac{\mathrm{d}x}{y}}$$

КОРРЕКТНОСТЬ!?

1.2.7. Групповой закон. Из всех кривых только изоморфные плоским кубикам наделяемы групповой структурой. Над $\mathbb{C}$ структура очевидна из предыдущего раздела:

$$\mathbf{X} \cong \frac{\mathbb{C}^+}{\Lambda} \text{ (фактор-группа).}$$

Над произвольным полем: *сумма коллинеарных точек равна нулю.*

КАРТИНКИ!

Список литературы

[**Kollar2019**] Janos Kollar, *Algebraic hypersurfaces.* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 56, Number 4, October 2019, Pages 543–568.

[**Newton1704**] I. Newton, *A Treatise of the reflexions, refractions, inflexions and colours of light.* Sam. Smith and Benj., Walford, London (1704).

[**Silverman2009**] Joseph H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves.* Springer, 2009.

[**Шафаревич1988**] И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии.* М., "Наука 1988