Шпаргалка по началам линейной алгебры

Векторные пространства — определение и простые свойства

Векторы, рассматриваемые в геометрии, можно складывать и умножать на числа. Обобщение и анализ их свойств приводит к понятию векторного пространства — основного объекта изучения *линейной алгебры*.

Определение. *(Вещественным) векторным пространством* называется множество V с операцией сложения $V \times V \to V$ и умножения на вещественные числа $\mathbb{R} \times V \to V$, обладающие перечисленными ниже свойствами. Сложение традиционно обозначается знаком $+$, а умножение — знаком $\cdot$.

Свойства сложения:

а) $v + u = u + v \ \ \forall v, u \in V$ (коммутативность сложения);

б) $(v + u) + w = v + (u + w) \ \ \forall v, u, w \in V$ (ассоциативность сложения);

в) существует такой элемент $0 \in V$ (*нуль*), что $v + 0 = v \ \ \forall v \in V$;

г) $\forall v \in V$ существует такой элемент $-v$ (*противоположный элемент*), что $v + (-v) = 0$.

Свойства умножения на число:

д) $(\lambda \cdot \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v) \ \ \forall v \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ассоциативность умножения);

е) $1 \cdot v = v \ \ \forall v \in V$;

Свойства, связывающие сложение и умножение на число:

ж) $\lambda \cdot (v + u) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot u \ \ \forall v, u \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность по V);

з) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \ \ \forall v \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность по $\mathbb{R}$).

Элементы векторного пространства V называют *ве́кторами*. Для краткости часто вместо $\lambda \cdot \mu$ и $\lambda \cdot v$ пишут просто $\lambda\mu$ и λv.

Это определение на первый взгляд выглядит не очень впечатляюще (или наоборот, очень впечатляюще), так что приведём сразу несколько примеров.

Задача 📘.1. Убедите себя в том, что следующие структуры являются векторными пространствами: а) множество векторов из геометрии на плоскости (как они определяются?) с обычными операциями сложения и умножения на число; б) множество $\mathbb{R}[x]$ многочленов с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения и умножения на число; в) множество вещественнозначных функций $X \to \mathbb{R}$ на произвольном множестве X с поточечными операциями сложения и умножения на число.

Из свойств, перечисленных в определении, следуют многие другие, привычные нам для векторов из геометрии. Докажем, например, единственность нуля в векторном пространстве V.

Предположим противное, пусть существует два нуля в V — обозначим их 0_1 и 0_2. Тогда

$$0_1 \underset{\text{по в) для нуля } 0_2}{=} 0_1 + 0_2 \underset{\text{по а)}}{=} 0_2 + 0_1 \underset{\text{по в) для нуля } 0_1}{=} 0_2,$$

то есть 0_1 и 0_2 на самом деле совпадают.

Другой пример: при умножении действительного числа $0 \in \mathbb{R}$ на любой вектор $v \in V$ получается нулевой вектор $0 \in V$. Действительно,

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v \underset{\text{по з)}}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v,$$

то есть (по в)) $0 \cdot v + 0 = 0 \cdot v + 0 \cdot v$, откуда прибавляя к обеим частям равенства противоположный к $0 \cdot v$ (см. г)) получим $0 \cdot v = 0$. Таким образом можно доказывать много (в том числе сложных) свойств и теорем одновременно для всех объектов, удовлетворяющих только перечисленным в определении свойствам — то есть для всех векторных пространств.

Замечание. Ничего не поменяется, если везде писать вместо $\mathbb{R}$ множество $\mathbb{Q}$ (или $\mathbb{C}$). Тогда говорят «векторное пространство над $\mathbb{Q}$» (или над $\mathbb{C}$). Но не будем пока усложнять себе жизнь.

Задача 📘.2 (ещё свойства). Докажите, что а) $2v = v + v \ \ \forall v \in V$; б) $-v = (-1) \cdot v \ \ \forall v \in V$; в) $\lambda \cdot 0 = 0 \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$; г) если $\lambda v = 0$, то $\lambda = 0$ или $v = 0$.

Задача 📘.3 (очень важный пример). Введите структуру векторного пространства на множестве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, то есть множестве строк вида $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R} \ \ \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

Подпространства

Определение. Непустое подмножество U векторного пространства V называется его *подпространством*, если оно *замкнуто относительно операций сложения и умножения на число*, то есть:

1) $\forall v, u \in U$ выполнено $v + u \in U$; 2) $\forall v \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\lambda v \in U$.

Другими словами, подмножество является подпространством, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций сложения и умножения.

Задача .4. Какие из следующих множеств U образуют подпространства в V? а) $V = \mathbb{R}^n$, $U = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 + \ldots + x_n = c\}$ ($c \in \mathbb{R}$ фикс.); б) $V = \mathbb{R}^n$, $U = \{x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n\}$; в) $V = \mathbb{R}^n$, $U = \{(x, y, x, y \ldots) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$; г) $V = \mathbb{R}[x]$, U — множество многочленов без свободного члена; д) $V = \mathbb{R}[x]$, U — многочлены степени не выше n.

Задача .5 (доп). Рассмотрим векторное пространство функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Какие из следующих множеств являются его подпространствами? а) множество нестрого монотонных функций; б) множество нестрого возрастающих функций; в*) множество периодических функций.

Линейные комбинации и линейная оболочка

Определение. Пусть V — векторное пространство. *Линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ называется вектор $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in V$. *Линейной оболочкой* векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$ называется множество всех их линейных комбинаций, обозначение: $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Говорят, что векторное пространство V *порождается* векторами $v_1, \ldots, v_k$, если $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = V$.

Задача .6. Пусть v и u — два непропорциональных вектора на плоскости, точка O фиксирована. Нарисуйте множество точек X для следующих линейных комбинаций OX. а) $OX = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$; б) $OX = v + \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$; в) $OX = \lambda v + \mu u$, $\lambda, \mu \in [0; 1]$; г) $OX = \lambda v + \mu u$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; д) $OX = \lambda v + \mu u$, $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; е*) $OX = (\cos \lambda) v + (\sin \lambda) u$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (что это за фигура?).

Задача .7 (конструкция подпространства). Докажите, что линейная оболочка набора векторов из V — подпространство в V.

Линейная независимость и базис

Определение. Система векторов $v_1, \ldots, v_k$ векторного пространства V называются *линейно независимой*, если только их *тривиальная* линейная комбинация равна нулевому вектору, то есть если из условия $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$ следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Задача .8. Дайте определение линейно зависимой системы векторов и приведите примеры.

Задача .9 (доп). а) Проверьте, что система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда он нулевой. б) Из двух — тогда и только тогда, когда они пропорциональны. в) Можно ли получить линейно независимую систему векторов из линейно зависимой, добавив в неё вектор? г) ..., удалив из неё вектор? д) Покажите, что система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов является линейной комбинацией остальных. е) Верно ли, что если система векторов линейно зависима, то *любой* её вектор линейно выражается через остальные?

Наконец, сформулируем два равносильных определения базиса векторного пространства.

Определение. Набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ называется *базисом* векторного пространства V, если он линейно независим и $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$. Пространство V в этом случае называется *конечномерным*.

Определение. Набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ называется *базисом* векторного пространства V, если для любого $v \in V$ существует единственный такой набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, что $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

Задача .10. а) Докажите, что $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ образуют базис векторного пространства $\mathbb{R}^n$ (его называют *стандартным базисом*). б) Докажите, что векторы $(1, 0, \ldots, 0)$, $(1, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $(1, 1, \ldots, 1)$ тоже образуют базис $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Все базисы конечномерного векторного пространства V содержат одно и то же количество векторов. Это количество называется* размерностью *векторного пространства V. Обозначение:* $\dim V$.

Задача 📓.11. Найдите размерность и укажите какой-нибудь базис
а) подпространства $\{x_1 + \ldots + x_n = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$; б) пространства многочленов степени не выше n; в) пространства многочленов степени не выше n, для которых $p(0) = 0$; г) пространства многочленов степени не выше 2 от n переменных.

Линейные отображения и изоморфизмы

Определение. Пусть V, W — векторные пространства. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *линейным*, если
1) для любых векторов $v_1, v_2 \in V$ выполнено $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$;
2) для любых $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

Замечание. Какие операции сложения и умножения в пунктах 1) и 2) выполняются в V, а какие в W?

Задача 📓.12. Являются ли линейными следующие отображения? а) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$;
б) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$, где a — фикс. из $\mathbb{R}$; в) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(3)$; г) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(3)^2$;
д) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $f(x) \mapsto f(x) + 3$; е) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $f(x) \mapsto f(x + 3)$; ж) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$;
з) $\rho\colon V \to V$, V — двумерная плоскость, ρ — поворот на некоторый фиксированный угол вокруг 0.

Задача 📓.13. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение. а) Докажите, что $\varphi(0) = 0$. (Что тут означают «0»?) б) Докажите, что если векторы $v_1, \ldots, v_k \in V$ линейно зависимы, то векторы $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k)$ тоже линейно зависимы.

Задача 📓.14 (линейное отображение задается образами базисных векторов). Пусть в V выбран какой-нибудь базис $v_1, \ldots, v_n$. Докажите, что для любых векторов $w_1, \ldots, w_n$ векторного пространства W существует линейное отображение, для которого $\varphi(v_i) = w_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$. Докажите, что такое линейное отображение единственно.

Определение. *Ядром* и *образом* линейного отображения $\varphi\colon V \to W$ называются множества

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}, \quad \operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$$

соответственно. Несложно проверить, что для любого линейного отображения $\varphi\colon V \to W$ ядро является подпространством в V, а образ — подпространством в W.

Теорема. *Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение. Тогда* $\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V$.

Идея доказательства: Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — базис $\operatorname{Ker}\varphi$. Дополним этот линейно независимый набор векторов V до базиса V: $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$. Тогда $\varphi(v_{k+1}), \ldots, \varphi(v_n)$ — базис $\operatorname{Im}\varphi$.

Определение. Пусть V, W — векторные пространства. Отображение $\varphi\colon V \to W$ называется *изоморфизмом векторных пространств*, если оно является биективным линейным отображением. Векторные пространства V и W в этом случае называются *изоморфными*.

Неформально изоморфность векторных пространств означает их «одинаковость» с точностью до переименования $v \in V$ на $\varphi(v) \in W$. Условия линейности 1) и 2) означают, что при таком переименовании операции сложения и умножения на число не поменялись.

Задача 📓.15. Докажите, что линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ и $\operatorname{Im}\varphi = W$.

Задача 📓.16. Докажите, что любое (конечномерное) векторное пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.

Задача 📓.17 (доп). Докажите, что векторное пространство функций $[0; 1] \to \mathbb{R}$ изоморфно векторному пространству функций $K \to \mathbb{R}$ на единичном квадрате $K = [0; 1] \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$.