Лекция 1 Аддитивные действия

Мн-ва с бинарной операцией: $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Z},*)$ $\cancel{a*b=\frac{ab}{2}}$ $a*b=a^{b^2+3}b+$ $+115\cdot$ число цифр в a

Опр1 $(G,*)$ бин. опер. $G\times G\to G$
$(a,b)\mapsto a*b$

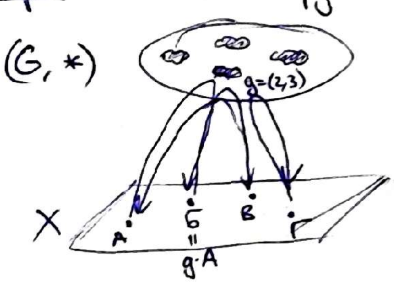
1) $(a*b)*c=a*(b*c)$
2) $\exists e\in G\quad a*e=e*a=a$ $\quad\forall a,b,c\in G$] группа] абелева (коммут.) группа
3) $\forall a\in G\quad \exists a^{-1}\in G:\ a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$
4) $a*b=b*a$

Примеры: $\cancel{(\mathbb{N},+)}$ $(\mathbb{Z},+)$ $(\mathbb{Q},+)$ $(\mathbb{R},+)$ $(\mathbb{C},+)$
$\cancel{(\mathbb{N},\cdot)}$ $\cancel{(\mathbb{Z},\cdot)}$ $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$
$(\mathbb{R}[x],+)$ $\cancel{(\mathbb{R}[x],\cdot)}$ $\frac{1}{x}$
$(\mathbb{R}^n,+)$ $(\mathbb{Q}^n,+)$ $\underline{G_a^n=(\mathbb{K}^n,+)}$ $\mathbb{K}=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_p$
$(a_1,\dots,a_n)+(a_1',\dots,a_n')=(a_1+a_1',\dots,a_n+a_n')$

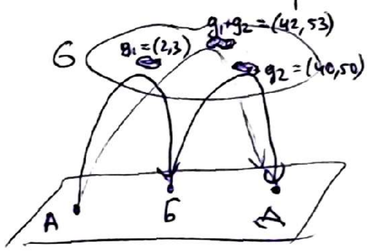
Упр - усно: G - мн-во всех подмн-в мн-ва M, $*=\Delta$ - симм. разность. G - группа?

(Некоммут. группы) $(S_n,\circ)$, $(GL_n,\cdot)$
перестановки, матрицы с $\det\neq 0$

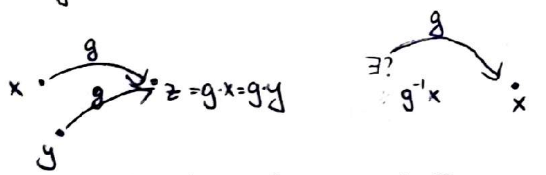
Опр2 Действие группы G на мн-ве X - это отобр-е $\alpha: G\times X\to X$
$(g,x)\mapsto g\cdot x$



$(\mathbb{K}^n,+)$
естеств. примеры
повороты
гомотетии



1) $g_1(g_2\cdot x)=(g_1*g_2)\cdot x$ $\quad\forall x\in X\ \forall g_1,g_2\in G$
2) $ex=x\quad\forall x\in X$

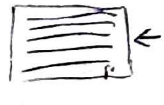


$\Rightarrow$ любой $g\in G$ определяет биекцию
$X\to X$
$x\mapsto g\cdot x$

Орбита точки $x\in X$: $Gx=\{gx\mid g\in G\}$ Стабилизатор точки $x\in X$: $G_x=\{g\in G\mid gx=x\}$

Примеры: 1) $G_a^2\curvearrowright A^2$ (плоскость) $(a_1,a_2)\cdot(x_1,x_2)=(x_1+a_1,\ x_2+a_2)$
Орбита одна, $G_x=\{(0,0)\}\ \forall x\in A^2$

2) ______ // ______ $=(x_1+a_1,\ x_2)$



$\leftarrow$ орб.

$G_x=\{(0,a_2)\mid a_2\in\mathbb{K}\}\quad\forall x\in A^2$

$=(x_1+a_1+a_2x_2,\ x_2)$
почему это действие?
$(x_1+a_1+a_2x_2+a_2'x_2,\ x_2)$
$+a_1'$

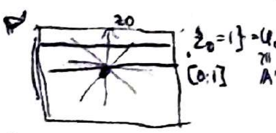
3) ______ // ______

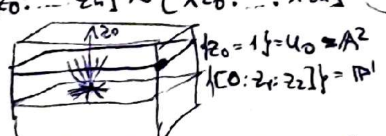
$G_x=\{(a_1,a_2)\mid a_1+a_2x_2=0\}$

Лемма G - коммут. группа. Тогда стабилизаторы точек одной орбиты равны.
□ $G_x\overset{?}{=}G_{gx}$ $\quad h\in G_{gx}\Leftrightarrow h\cdot gx=gx\Leftrightarrow ghx=gx\underset{g^{-1}\cdot}{\Leftrightarrow}hx=x\Leftrightarrow h\in G_x$ ■

Действие эффективно, если
$gx=x\ \forall x\Rightarrow g=e$
1), 3) эффект. 2) неэффект.
Как связать через стабилизаторы?
$\bigcap_{x\in X}G_x=\{e\}$

Опр.3 Аффинное пр-во $A^n=\mathbb{K}^n=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{K}\}$ $\mathbb{K}=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$
Проективное пр-во $\mathbb{P}^n=\{z=[z_0:\dots:z_n]\mid z_i\in\mathbb{K}$ не все $0\}/\sim$
$[z_0:\dots:z_n]\sim[\lambda z_0:\dots:\lambda z_n]$



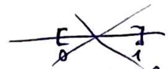


Аффинные карты $U_i=\{z\in\mathbb{P}^n\mid z_i\neq 0\}$, $i=0,\dots,n$ $\qquad\mathbb{P}^n=\bigcup_{i=0}^{n}U_i$
Если $z_i\neq 0$, то $[z_0:\dots z_i\dots:z_n]=\left[\frac{z_0}{z_i}:\dots:1:\dots:\frac{z_n}{z_i}\right]$ т.е. м.сч. $z_i=1$
$U_i\cong A^n$

Подмн-во в $\mathbb{A}^n$ наз-ся <u>замкнутым (по Зарисскому)</u> в $\mathbb{A}^n$, если оно задаётся системой полиномиальных ур-й $\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \dots \\ f_m(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$ $f_i \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$

<u>Примеры:</u> точка: $\begin{cases} x_1 - \dots = 0 \\ \dots \\ x_n - \dots = 0 \end{cases}$

$\{x_2 = x_1^2\} \subseteq \mathbb{A}^2$

$\mathbb{A}^1$ 

только кон. мн-ва точек в $\mathbb{A}^1$

Подмн-во в $\mathbb{P}^n$ наз-ся <u>замкнутым (по Зарисскому)</u> в $\mathbb{P}^n$, если оно задаётся системой <u>однородных</u> полином. ур-й

~~$z_0+z_1=2$~~
~~$3z_0+3z_1=2$~~

$z_0 z_2 - z_1^2 = 0$

В U_0: $\frac{z_2}{z_0} - \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^2 = 0$, $x_2 - x_1^2 = 0$

Вне U_0: $[0:0:1]$

В U_1: $\frac{z_0}{z_1}\cdot\frac{z_2}{z_1} - 1 = 0$

Вне U_1: $[1:0:0]$ и $[0:0:1]$

В U_2: парабола

Вне U_2: $[1:0:0]$

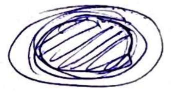
- $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ замкнуто $\Rightarrow$ "размерность" $X < n$
- $|\mathbb{K}|=\infty$ $\nexists\, X_i \subsetneq \mathbb{P}^n$ замкн.: $\bigcup_{i=1}^{N} X_i = \mathbb{P}^n$ $\Leftrightarrow$ $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$, $\bigcap_{i=1}^{N} U_i \neq \varnothing$, $\cancel{\varnothing}$ откр.

<u>Открытое</u> подмн-во в $\mathbb{A}^n$ или $\mathbb{P}^n$ — дополнение до замкнутого

Примеры чего: $\mathbb{A}^2$ без точки, кон. кол-во точек, параболы; $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$

ключевое

<u>Опр.</u> <u>Аддитивным действием</u> на $\mathbb{P}^n$ называется эффективное действие $\mathbb{G}_a^N \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ с открытой орбитой, заданное (в к-тах) многочленами от к-т $\mathbb{G}_a^N$ и $\mathbb{P}^n$

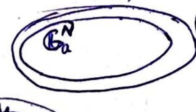


<u>Предлож.</u> 1) $N=n$
2) такие действия продолжают действие сдвигами $\mathbb{G}_a^n \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$

$\square$

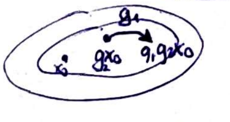
- Пусть $x_0 \in \mathbb{P}^n$ — точка из откр. орбиты и $g \in G_{x_0}$, $g \neq e$. По лемме $G_x = G_{x_0}$ $\forall x \in$ откр. орб. $\Rightarrow$
  $\Rightarrow gx = x$ $\forall x \in$ откр. орб. $gx - x = 0$ — в к-тах система полином. ур-й, пусть $X \subseteq \mathbb{P}^n$ — мн-во реш.
  - $\to X \subsetneq \mathbb{P}^n$ не может содержать откр. орбиту (иначе $X \cup (\mathbb{P}^n \setminus U) = \mathbb{P}^n$)
  - $\to X = \mathbb{P}^n$ $\Rightarrow$ действие не эффективно

  Значит, $G_{x_0} = \{e\}$ $\forall x_0$ из откр. орбиты
- Рассм. орбитное отображение $f: \mathbb{G}_a^N \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, $f(g) = gx_0$. $\operatorname{Im} f$ — открытая орбита
  f инъективно т.к. $G_{x_0} = \{e\}$



$\Rightarrow$ 1) $N=n$

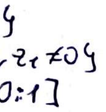
2) Т.к. $(g_1 \cdot g_2)x_0 = g_1 \cdot (g_2 x_0)$



$\blacksquare$

<u>Примеры:</u> $\mathbb{G}_a^2 \curvearrowright \mathbb{P}^2$

1) $(a_1,a_2)\cdot[z_0:z_1:z_2] = [z_0 : z_1 + a_1 z_0 : z_2 + a_2 z_0]$ ~~Орбиты~~: $\{z_0 \neq 0\}$, точки



2) ~~$(a_1,a_2)\cdot[z_0:z_1:z_2]$~~ $= [z_0 : z_1 + a_1 z_0 : z_2 + a_1 z_1 + (a_2 + \frac{a_1^2}{2}) z_0]$ Орбиты $\{z_0 \neq 0\}$, $\{z_0 = 0, z_1 \neq 0\}$, $[0:0:1]$

<u>Задача</u> Пров., что действие

Есть ли ещё?

Лекция 2 Пример 1 Аддитивные действия $\mathbb{G}_a^2 \curvearrowright \mathbb{P}^2$

1) $(a_1,a_2)\cdot[z_0:z_1:z_2] = [z_0 : z_1 + a_1 z_0 : z_2 + a_2 z_0]$

2) $(a_1,a_2)\cdot[z_0:z_1:z_2] = [z_0 : z_1 + a_1 z_0 : z_2 + a_1 z_1 + (a_2 + \frac{a_1^2}{2}) z_0]$

$e = 2{,}718281828\ldots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

$\exp\beta = 1 + \frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!} + \ldots$ $\qquad f(x+\beta) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}\beta + \frac{f''(x)}{2!}\beta^2 + \ldots$

2) $A = \{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 \mid a_i \in \mathbb{K}\} =: \mathbb{K}[y]/(y^3)$

$+,\ \cdot \mod y^3$

$\exp(\underbrace{a_1 y + a_2 y^2}_{\text{без св. члена}}) = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + \underbrace{\frac{(a_1 y + a_2 y^2)^2}{2!}}_{a_1^2 y^2/2!} + 0 \in A$

$z_0 + z_1 y + z_2 y^2 \in A$. Умножим:

$z_0 \cdot 1 + (z_1 + a_1 z_0)\cdot y + (z_2 + a_1 z_1 + (a_2 + \frac{a_1^2}{2}) z_0) y^2$

1) $A = \{a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_2 \mid a_i \in \mathbb{K}\} =: \mathbb{K}[y_1,y_2]/(y_1^2, y_1 y_2, y_2^2)$

Задача 1: аналогично получить из неё действие 1)

План: соответствие Хассета-Чинкеля

На посл. лекции — обобщение на $X \in \mathbb{P}^n$

Многочлены и дифференциальные операторы

$\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ и $\mathbb{K}[y_1,\ldots,y_n] = \mathbb{K}[\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}]$ дифф. операторы с пост. коэфф.

$\frac{\partial}{\partial x}[x^n] = n x^{n-1}$

$\frac{\partial}{\partial x_2}[x_1^5 x_2^4 x_3 + 3 x_2 x_3^7 + 5 x_1^8 x_3] = 4 x_1^5 x_2^3 x_3 + 3 x_3^7$, $\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}[-\text{"}-] = 20 x_1^4 x_2^3 x_3$

$\mathbb{K}[y_1,\ldots,y_n] \times \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n] \longrightarrow \mathbb{K}$

$(g,f) \longmapsto g[f]|_{(0,\ldots,0)} =: \langle g|f\rangle$

$\langle y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n} \mid x_1^{l_1}\ldots x_n^{l_n}\rangle = \begin{cases} k_1!\ldots k_n! & \text{если } (k_1,\ldots,k_n) = (l_1,\ldots,l_n) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Опр. $V \subseteq \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ наз-ся подпространством, если 1) $f,g \in V \Rightarrow f+g \in V$ 2) $f \in V, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda f \in V$

Пример 2: $\mathbb{K}[x] \supseteq \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{K}\} = \langle 1, x, x^2\rangle$

$\mathbb{K}[x_1,x_2] \supseteq \{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \mid a_i \in \mathbb{K}\} = \langle 1, x_1, x_2\rangle$

$\langle f_1,\ldots,f_k\rangle := \{a_1 f_1 + \ldots + a_k f_k \mid a_i \in \mathbb{K}\}$ всегда подпр-во

Соответствие между подпр-вами $V \subseteq \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ и $I \subseteq \mathbb{K}[y_1,\ldots,y_n]$

подпр-во $V \subseteq \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n] \rightsquigarrow I_V = \{g \in \mathbb{K}[y_1,\ldots,y_n] \mid \langle g|f\rangle = 0 \ \forall f \in V\}$

$I \subseteq \mathbb{K}[y_1,\ldots,y_n] \rightsquigarrow V_I = \{f \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n] \mid \langle g|f\rangle = 0 \ \forall g \in I\}$

Примеры: 1. $V = \langle x\rangle \subseteq \mathbb{K}[x] \rightsquigarrow I_V = \langle 1, y^2, y^3, \ldots\rangle \subseteq \mathbb{K}[y]$

$g = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots$ $\qquad y = \frac{\partial}{\partial x}$

$g \in I_V \Leftrightarrow \underbrace{\langle g|x\rangle}_{a_1} = 0$

$V_I = \langle x\rangle \subseteq \mathbb{K}[x] \leftsquigarrow I = \langle 1, y^2, y^3, \ldots\rangle \subseteq \mathbb{K}[y]$

$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

$f \in V_I \Leftrightarrow \langle 1|f\rangle = a_0$

$\langle y^2|f\rangle = 2!\,a_2 = 0$

$\langle y^3|f\rangle = 3!\,a_3 = 0$

2. $V = \langle 1, x, x^2\rangle \longleftrightarrow I = \langle y^3, y^4, \ldots\rangle =: \underbrace{(y^3)}_{\text{делятся на } y^3}$

3. $I = (y^2-1) \longrightarrow V_I = 0$

$\Vert$

$\langle y^2-1,\ y^3-y,\ y^4-y^2,\ y^5-y^3, \dots \rangle$

$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots \in V_I \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle y^2-1 \mid f\rangle = 2!\,a_2 - a_0 = 0 \\ \langle y^3-y \mid f\rangle = 3!\,a_3 - a_1 = 0 \\ \langle y^4-y^2 \mid f\rangle = 4!\,a_4 - a_2 = 0 \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_0 = 2!a_2 = 4!a_4 = \dots \\ a_1 = 3!a_3 = 5!a_5 = \dots \end{matrix}$$

не биекция!

$I_V = \mathbb{K}[y] \longleftarrow V = 0$

Лемма 1 $V \to I_V$ и $I \to V_I$ определяют биекцию между $V \subseteq \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]_{\le d}$ и $I \supseteq \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]_{>d}$

$\square$ $V \longrightarrow I_V = \{g \mid \langle g|f\rangle = 0\ \forall f \in V\}$ ясно что $\supseteq \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]_{>d}$

$\cap\Vert$

$V_{I_V} = \{\tilde f \mid \langle g|\tilde f\rangle = 0\ \forall g \in I_V\}$ все $\tilde f = f \in V$ подх.

$=$ из-за размерностей $\blacksquare$

Действие сдвигами $\mathbb{G}_a^n \curvearrowright \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ $\quad \bar\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{G}_a^n$, $f(\bar x) = f(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ $\to \bar\beta \cdot f(\bar x) = f(\bar x + \bar\beta) = f(x_1+\beta_1,\dots,x_n+\beta_n)$

Опр. Подпр-во V наз-ся *инвариантным отн. сдвигов*, если вып. след. эквив. усл-я:

(i) V инв. отн. $y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $\forall i = 1,\dots,n$, т.е. $f \in V \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \in V$

(ii) V инв. отн. действ. сд., т.е. $f(\bar x) \in V \Rightarrow f(\bar x + \bar\beta) \in V$

$\square$ (ii) $\Rightarrow$ (i) $\quad \begin{matrix} f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \in V \\ f(x_1,\dots,x_i+\delta,\dots,x_n) \in V \end{matrix} \Rightarrow \frac{\text{их разность}}{\delta} \in V \underset{\lim_{\delta\to 0}}{\Rightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_i} \in V$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Формула Тейлора $\quad f(x+\beta) = \sum_{i_1\dots i_n} \frac{\beta_1^{i_1}\dots\beta_n^{i_n}}{i_1!\dots i_n!} \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}[f(x)]$

все $\frac{\partial}{\partial x_i}[f] \in V \Rightarrow f(x+\beta) \in V$ $\blacksquare$

Пример 3 $V = \langle 1, x_1, x_2\rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1,x_2]$

- инв. отн. $\frac{\partial}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial}{\partial x_2}$
- инв. отн. сдвигов $(1,\ x_1+\beta_1,\ x_2+\beta_2 \in V)$

$V = \langle 1, x_1, x_2 + \frac{x_1^2}{2}\rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1,x_2]$

- инв. отн. $\frac{\partial}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial}{\partial x_2}$
- инв. отн. сдвигов $(1,\ x_1+\beta_1,\ x_2+\beta_2+\frac{(x_1+\beta_1)^2}{2} \in V)$

$\boxed{\text{NEW}}$ Доказательство (ii) инв. отн. сдвигов $\Rightarrow$ (i) инв. отн. $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $\forall i$ без честных пределов. Будем пользоваться формулой Крамера: если $Ay=b$ – система линейных уравнений, A $n\times n$, $\det A \neq 0$, то $\forall i$ $y_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, где A_i – матрица A, в которой заменили i-тый столбец на b.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Будем для краткости писать $f(x_1,\dots,x_n) = f(x_i)$ и f' вместо $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Обозн. d = степень f по x_i. Имеем формула Тейлора:

$$\begin{cases} f(x_i+1) - f(x_i) = \frac{f'(x_i)}{1!}\cdot 1 + \frac{f''(x_i)}{2!}\cdot 1^2 + \dots + \frac{f^{(d)}(x_i)}{d!}\, 1^d \\ f(x_i+2) - f(x_i) = \frac{f'(x_i)}{1!}\cdot 2 + \frac{f''(x_i)}{2!}\, 2^2 + \dots + \frac{f^{(d)}(x_i)}{d!}\cdot 2^d \\ \dots \\ f(x_i+d) - f(x_i) = \frac{f'(x_i)}{1!}\cdot d + \frac{f''(x_i)}{2!}\, d^2 + \dots + \frac{f^{(d)}(x_i)}{d!}\cdot d^d \end{cases}$$

Это система лин. ур-ий с решением $y_i = \frac{f^{(i)}(x)}{i!}$ и коэфф. $\in \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$.

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1^2 & \dots & 1^d \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^d \\ \vdots & & & \vdots \\ d & d^2 & \dots & d^d \end{pmatrix} = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot d\cdot \underbrace{V(1,2,\dots,d)}_{\text{определитель Вандермонда}} \neq 0 \xRightarrow{\text{ф-ла Крамера}}$$

$$y_1 = \frac{f'(x)}{1!} = \frac{\det\begin{pmatrix} f(x_i+1)-f(x_i) & 1^2 & \dots & 1^d \\ f(x_i+2)-f(x_i) & 2^2 & \dots & 2^d \\ \dots & & & \\ f(x_i+d)-f(x_i) & d^2 & \dots & d^d \end{pmatrix}}{\det A}$$

т.к. V инв. отн. сдвигов, то первый столбец из мн-нов $\in V$, остальные – числа / Внизу тоже число

$$\frac{\in V}{\text{число}} \in V \Rightarrow V \text{ инв. отн. } \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Лекция 3

Опр. $I \subseteq \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]$ наз-ся **идеалом**, если 1) $f, g \in I \Rightarrow f+g \in I$
2) $f \in I$, $g \in \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n] \Rightarrow fg \in I$

Примеры: $(y^3) \subseteq \mathbb{K}[y]$ $\quad \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]_{>d} \subseteq \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]$, $\quad \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]$

$(f_1,\dots,f_k) = \{ f_1 g_1 + \dots + f_k g_k \mid g_i \in \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n] \}$

Теорема Гильберта о базисе: любой идеал в $\mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]$ устроен так

Лемма В соотв. $V \leftrightarrow I$ $\quad V$ инв. отн. сдвигов $\Leftrightarrow I$ идеал. В этом случае

$V_I = \{ f \mid g[f]=0 \ \forall g \in I\}$ и $I_V = \{ g \mid g[f]=0 \ \forall f \in V\}$

□ ($\Rightarrow$) 1) очев. 2) Пусть $g \in I_V$, т.е. $\langle g | f\rangle = 0 \ \forall f \in V$. Инв. отн. $\forall \frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \forall \tilde{g} \in \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]$ $\forall f \in V$ $\tilde{g}[f] \in V$.

Тогда $\forall \tilde{g}$ $\forall f \in V$ $\quad 0 = \langle g | \tilde{g}[f]\rangle = \langle g\tilde{g} [f]\rangle \Rightarrow g\tilde{g} \in I_V \Rightarrow I_V$ - идеал

Кроме того, $\quad = \langle \tilde{g} | g[f]\rangle = 0 \quad \forall \tilde{g} \Rightarrow g[f]=0$ и имеем ■

($\Leftarrow$) Аналог. (упр.)

Пример 1 1) $V = \langle 1, x_1, x_2\rangle \longleftrightarrow I = (y_1^2, y_1y_2, y_2^2)$ $\quad$ (расписывая как в пр. ряд $\langle 1|f\rangle=0$, $\langle x_1|f\rangle=0$, $\langle x_2|f\rangle = 0$)

2) $V = \langle 1, x_1, x_2 + \frac{x_1^2}{2}\rangle \leftrightarrow I = (y_1^2 - y_2, y_1y_2)$

Итого:
Биекция
$$\left\{\begin{array}{c}\text{порождающие подпр-ва} \\ V \subseteq \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] \\ \dim V = m\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{невырожденные идеалы} \\ I \subseteq \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n] \\ \operatorname{codim} I = m \\ \text{с носителем в } 0\end{array}\right\} \quad (*)$$
с точностью до GL-эквивалентности

Невыр. V: $\nexists y \in \langle y_1,\dots,y_n\rangle$: $y[V]=0$ $\quad\leftrightarrow\quad$ Невыр. I: $I \cap \langle y_1,\dots,y_n\rangle = 0$

V инв. отн. $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $\forall i \Leftrightarrow V$ инв. отн. сдвигов $\quad\leftrightarrow\quad I$ идеал

V порождает $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ как алгебру

$\dim V = m \quad\leftrightarrow\quad \operatorname{codim} I = m$

I с носителем в 0: $\exists d$: $y_i^d \in I$ $\forall i$
($\Leftrightarrow$ мн-во нулей I состоит только из 0 над алг. замкн. $\mathbb{K}$)

GL-эквив: невыр. замены в $\langle x_1,\dots,x_n\rangle$ и $\langle y_1,\dots,y_n\rangle$ и соотв. замены в $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ и $\mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]$

Локальные алгебры

Опр. Векторное пр-во A наз-ся **алгеброй**, если на нём задано произведение $\cdot : A \times A \to A$ т.ч.
$a(b+c) = ab+ac$ и $(a+b)c = ac+bc$ (дистрибутивность).

У нас алгебра = конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра с единицей
$a \cdot b = b \cdot a$ $\quad (a\cdot b)\cdot c = a(bc)$ $\quad \exists 1 \in A$: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Примеры: $A = \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ – не конечном. $\quad A = \langle 1, x, x^2\rangle = \mathbb{K}[x]/(x^3)$ $\quad A$ = алгебра всех линейных отобр. $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ некоммут.

Идеал в алгебре A – определение как выше

Максимальный идеал – такой $m \subseteq A$ (идеал) что $\nexists m \subsetneq m' \subsetneq A$

Опр. Алгебра A наз-ся **локальной**, если в ней $\exists!$ макс. идеал $\quad$ $x \neq 0$ нильп. если $\exists k$: $x^k = 0$

Факт 1: Конечномерная алг. A локальна $\Leftrightarrow A = \mathbb{K} \oplus m$, где m - идеал, сост. из нильпотентов

codim $m = 1$ $\quad \forall a \in A \ \exists!\ a = \underset{\in \mathbb{K}}{\lambda} + \underset{\in m}{m}$

($\Leftarrow$) Элементы $A \setminus m$ обратимы ($a \cdot a^{-1} = 1$)
$\frac{1}{\lambda + m} = \frac{1}{\lambda} - \frac{m}{\lambda^2} + \frac{m^2}{\lambda^3} - \frac{m^3}{\lambda^4} + \dots$ кон.

($\Rightarrow$) λ - с/з оператора L_a умн. на a. Тогда $a - \lambda$ необратим $\in m$.

Пример $A = \mathbb{K}[x]/(x^3) = \mathbb{K} \oplus \langle x, x^2\rangle$

Факт 2: A лок. $\Rightarrow$ $m \xrightarrow{\exp} 1+m$ биекция. ($\Rightarrow (m,+) \underset{\exp}{\cong} (1+m, \cdot)$ т.к. $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$) изоморфизм G

Кол-во лок. алг

$\dim A$	1	2	3	4	5	6	≥ 7
	1	1	2	4	9	25	∞

$\mathbb{K}$ $\quad \mathbb{K}[y]/(y^2)$

упр – любая алг. A – прямая сумма лок. алгебр

Соответствие Хассетта-Чинкеля. Имеется биекция:

(а) аддитивные действия на $\mathbb{P}^n$
(б) локальные алгебры A, $\dim A = n+1$
(в) идеалы I как в (*), $\operatorname{codim} I = n+1$
(г) подпрост. подпр-ва V как в (+), $\dim V = n+1$

□ (в)⟷(г) было

(в) → (б) $I \subseteq \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n] \rightsquigarrow A := \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]/I$

$\operatorname{codim} I = n+1 \Rightarrow \dim A = n+1$

$A = \mathbb{K} \oplus \underbrace{\langle y_1,\dots,y_n\rangle}_{\text{нильп.}}$ т.к. y I нос. в 0 $\Rightarrow A$ локальна

(б) → (в) $m = \langle a_1,\dots,a_n\rangle$

Рассм. $\varphi: \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n] \to A$ $\quad \operatorname{Im}\varphi \ni \varphi(1), \varphi(y_1),\dots,\varphi(y_n)$

$g \longmapsto g(a_1,\dots,a_n)$ $\quad \langle 1, a_1, \dots, a_n\rangle = A$

Обозн. $I = \operatorname{Ker}\varphi = \{g \mid \varphi(g)=0\}$ $\quad$ Заметим, что $\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\cdot\varphi(g_2)$

• a_i нильп. $\Rightarrow \exists k: \varphi(y_i)^k = 0 = \varphi(y_i^k) \Rightarrow y_i^k \in I \Rightarrow y$ I носитель в 0

Лекция 4

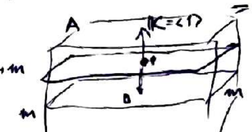
• $a_1,\dots,a_n$ — базис m $\Rightarrow$ нет ~~линейной~~ нетрив. линейной комб. g т.ч. $g(a_1,\dots,a_n) = 0 \Rightarrow I \cap \langle y_1,\dots,y_n\rangle = 0$

(б) → (а)

Возьмём $\exp m = (1+m, \cdot) \cong (m,+) = \mathbb{G}_a^n$.

Cодействие $\exp m \curvearrowright A \cong_{\text{сохр.}} \mathbb{K}^{n+1}$ — умн. в A $\rightsquigarrow$

действие $\exp m \curvearrowright \mathbb{P}(A) \simeq \mathbb{P}^n$ т.к. действие линейное



/умножить <=> растянуть/

• эффект.: $(1+z)a = a$ $\forall a \in \mathbb{A}^n$ только при $z=0$ (подст. $a=(1)$)

• откр. орбита: $\mathbb{G}_a^n\langle 1\rangle$, т.к. это все прямые $\not\subseteq m$

В к-тах $\underset{z_0}{\mathbb{K}} \oplus \underset{z_1\dots z_n}{m}$ задана ур-м $z_0 \neq 0$

$\exp x \cdot a = b$
$\exp(x \cdot a = b$
$(\exp(x)$

(а) → (б)

$(a_1,a_2)\cdot[z_0:z_1:z_2] = [z_0 : z_1 + a_1z_0 : z_2 + a_1z_1 + (a_2 + \frac{a_1^2}{2})z_0]$

$(s_1,s_2)\cdot(x_0,x_1,x_2) = (0, s_1x_0, s_1x_1 + s_2x_0)$ — лин. отобр-е

$y_1 \leftrightarrow (1,0)$: $(x_0,x_1,x_2) \mapsto (0,x_0,x_1)$

$y_2 \leftrightarrow (0,1)$: $(x_0,x_1,x_2) \mapsto (0,0,x_0)$

$y_1, y_2 \in$ алгебре лин. отобр-й $\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$. Рассм. все мн-чл от y_1 и y_2:

$y_1\cdot y_2$: $(x_0,x_1,x_2) \mapsto (0,0,0)$

y_2^2: $(x_0,x_1,x_2) \mapsto (0,0,x_0)$ т.е. $y_2^2 = y_1$

Получили алгебра $A = \mathbb{K}[y_1,y_2]/(y_2^2 - y_1, y_1y_2) \cong \mathbb{K}[y_2]/(y_2^3)$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\a_1&1&0\\a_2&0&1\end{pmatrix} \leftrightarrow (a_1,a_2) \longmapsto \begin{pmatrix}1&0&0\\a_1&1&0\\a_2+\frac{a_1^2}{2}&a_1&1\end{pmatrix}$ не всегда нижняя унитреуг., но заменой базиса в $\mathbb{K}^{n+1}$ всегда можно сделать такой

$\rho: \mathbb{G}_a^n \to GL_{n+1}(\mathbb{K})$ — представление

дифференциал $d\rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{K})$ — представление алгебр Ли

$(s_1,s_2) \longmapsto \begin{pmatrix}0&0&0\\s_1&0&0\\s_2&s_1&0\end{pmatrix}$ можно записать нижн. нильтреуг. матрицами

$da_1 = s_1$, $da_2 = s_2$

$\tau: U(\mathfrak{g}) \to \operatorname{Mat}_{n+1}(\mathbb{K})$ — представление асс. алгебр

Если $\mathfrak{g} = \langle y_1,\dots,y_n\rangle$ коммут., то $U(\mathfrak{g}) = \mathbb{K}[y_1,\dots,y_n]$

$\tau((\mathfrak{g})) = \tau((y_1,\dots,y_n))$ — макс. идеал в $A = \tau(U(\mathfrak{g}))$ сост. из нильп. эл-тов

образ многочленов без своб. члена $\qquad$ образ всех многочленов

Асс. алг. $A \rightsquigarrow$ алг. Ли A_L
$[a,b] = ab - ba$

U — универсальная обёртывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если

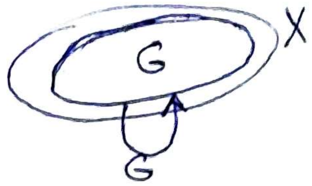
$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & U_L \arrow[d, "\exists!\, \text{асс.}"] \\ A_L & A \end{tikzcd}$$

Почему $\dim A = n+1$? $\quad \underset{\operatorname{Mat}_{n+1}(\mathbb{K})}{\overset{\cap}{A}} \cdot v$ — вектор соотв. любой точке в откр. орбите $\quad \pi: A \to \mathbb{K}^{n+1}$. $\operatorname{Ker}\pi = 0$, т.к. если $Av = 0$, то

$a \in \operatorname{Ker}\pi$, то $av = 0 \Rightarrow a\mathbb{K}^{n+1} = aAv = Aav = 0 \Rightarrow a = 0$. $\quad Av = \mathbb{K}^{n+1}$ т.к. откр. орбита

Итого для $n=2$

Аддитивное действие	$[z_0 : z_1 + a_1 z_0 : z_2 + a_2 z_0]$	$[z_0 : z_1 + a_1 z_0 : z_2 + a_1 z_1 + (a_2 + \frac{a_1^2}{2} z_0)]$
Локальные алгебры	$\mathbb{K}[y_1, y_2]/(y_1^2, y_1 y_2, y_2^2)$	$\mathbb{K}[y]/(y^3) \cong \mathbb{K}[y_1, y_2]/(y_1^2 - y_2, y_1 y_2)$
Идеалы	$(y_1^2, y_1 y_2, y_2^2)$	$(y_1^2 - y_2, y_1 y_2)$
Порожд. подпр-ва	$\langle 1, x_1, x_2 \rangle$	$\langle 1, x_1, x_2 + \frac{x_1^2}{2} \rangle$



многообразия, допускающие аддитивные действия $\mathbb{G}_a^n \curvearrowright X$ с откр. орб. $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ vs торические многообразия $\mathbb{G}_m^n \curvearrowright X$ с откр. орб. $\mathbb{G}_m = (\mathbb{K}\setminus\{0\}, \cdot)$

Аддитивные действия на гиперповерхностях

Гиперпов-ть $X \subseteq \mathbb{P}^n$ – задана одним однородным ур-ем $f(z_0, z_1, \ldots, z_m) = 0$.

$X \longleftrightarrow$  веер

Опр Индуцированным аддитивным действием на $X \subseteq \mathbb{P}^m$ наз-ся регулярное (полиномиальное) действие $\mathbb{G}_a^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^m$ т.что его ограничение $\mathbb{G}_a^n \times X \to X$ имеет открытую орбиту в X.

$\mathbb{P}^n$

берём замыкание X любой орбиты $\mathbb{G}_a^n \curvearrowright \mathbb{P}^m$, тогда $X \subseteq \mathbb{P}^m$ имеет открытую орбиту

Пример: $\mathbb{G}_a \curvearrowright X = \{2z_0z_2 - z_1^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$ (невырожденная квадрика) V

$$a \cdot [z_0 : z_1 : z_2] = [z_0 : z_1 + a_1 z_0 : z_2 + a_1 z_1 + \frac{a_1^2}{2} z_0]$$ — индуц. адд. действие на X

если $\in X \Rightarrow \in X$ Откр. орбита $\{z_0 \neq 0\} \cap X$

Соответствие Хасетта-Чинкеля (полная версия)

(а) индуц. адд. действие на $X \subseteq \mathbb{P}^m$, $\dim X = n$, $X \not\subseteq$ гиперпл-ти

~~(...) точные цикл. представления $\mathbb{G}_a^n \to GL_{m+1}(\mathbb{K})$~~

(б) пары (A, U), где A – лок. алгебра, $\dim A = m+1$, $U \subseteq \mathfrak{m}$ – подпр-во $\dim = n$, порожд. A как алг.

(в) невыр. идеалы $I \subseteq \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_n]$ с нос. в 0, $\operatorname{codim} I = m+1$

(г) порожд. подпр-ва $V \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$; $\dim V = m+1$

четко про „с точностью до изоморфизма"?

(б) $\leftrightarrow$ (в) $\leftrightarrow$ (г) примерно как раньше

(б) $\longrightarrow$ (а) $\exp U \curvearrowright \mathbb{P}(A)$

Пример: $A = \mathbb{K}[y]/(y^3) = \langle 1, y, y^2 \rangle$, $\mathfrak{m} = \langle y, y^2 \rangle \supset U = \langle y \rangle$

$\exp ay = 1 + ay + \frac{a^2y^2}{2}$

$z_0 + z_1 y + z_2 y^2$

Умножим: $z_0 + (z_1 + a_1 z_0)y + (z_2 + a_1 z_1 + \frac{a_1^2}{2} z_0)y^2$

т.е. как в примере V

Теорема $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ с инд. адд. действ. соотв. (A, U), $\pi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/U \cong \mathbb{K}$.

Тогда 1) степень X – это макс. число d, т.что $\mathfrak{m}^d \not\subseteq U$. (Аржанцев, Шаройко '2011)

2) X задаётся ур-ем $z_0^d \, \pi\left(\ln\left(1 + \frac{z}{z_0}\right)\right) = 0$ (степ. d), где $z_0 + z \in A$, $z_0 \in \mathbb{K}$, $z \in \mathfrak{m}$ соотв. точке в X.

Пример: $A = \mathbb{K}[y]/(y^3)$, $U = \langle y \rangle$

$$\ln\left(1 + \frac{z_1}{z_0}y + \frac{z_2}{z_0}y^2\right) = \frac{z_1}{z_0}y + \frac{z_2}{z_0}y^2 - \frac{\left(\frac{z_1}{z_0}y + \frac{z_2}{z_0}y^2\right)^2}{2} = \frac{z_1}{z_0}y + \frac{z_2}{z_0}y^2 - \frac{z_1^2}{2z_0^2}y^2$$

$\pi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/U = \langle y^2 \rangle$

$$\frac{z_2}{z_0} - \frac{z_1^2}{2z_0} \xrightarrow{\cdot z_0^2} z_0 z_2 - \frac{z_1^2}{2} = 0$$

т.е. как в примере V

Сл-е $X \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ с инд. адд. действ. $\Rightarrow d \leq n+1$

Теорема (Шаройко '20..) На невырожденной квадрике $\exists!$ адд. действие

Теорема (Аржанцев, З'2021) На невыр. гиперпов-ти ≤ 1 инд. адд. действ.

$\nexists$ замены, уменьшающей число перем. $\Leftrightarrow$ A горенштейнова, т.е. $\dim \operatorname{Soc} A = 1$

$\operatorname{Soc} A = \{a \in A \mid a\mathfrak{m} = 0\}$

$\Leftrightarrow$ полилинейная форма $F : \underbrace{A \times \ldots \times A}_{d} \to \mathbb{K}$ соотв.* ур-ю $f = 0$ имеет $\operatorname{Ker} F = 0$.

$\operatorname{Ker} F = \{a \in A \mid F(a, a^{(2)}, \ldots, a^{(d)}) = 0 \ \forall a^{(i)}\}$ – макс. идеал A, который $\subseteq U$.

* $F \rightsquigarrow f(a) = F(a, \ldots, a)$

$f \rightsquigarrow F(a^{(1)}, \ldots, a^{(d)})$ – это $\frac{1}{d!} \cdot$ коэфф. при $t_1 \ldots t_d$ в $f(t_1 a^{(1)} + \ldots + t_d a^{(d)})$