От динамики на торе к изомонодромным деформациям

А.А.Глуцюк

Упражнения по миникурсу

1. Докажите, что число вращения ρ гомеоморфизма f окружности, сохраняющего ориентацию,

а) не меняется при применении сопряжения гомеоморфизмом h, сохраняющим ориентацию: $\rho(h \circ f \circ h^{-1}) = \rho(f)$;

б) меняется на противоположное, если h обращает ориентацию: $\rho(h \circ f \circ h^{-1}) = -\rho(f)$.

2. Докажите, что $\rho(f^n) = n\rho(f)$. Здесь $f^n = f \circ \cdots \circ f$: n-я итерация.

3. Докажите, что если гомеоморфизмы окружности, сохраняющие ориентацию, коммутируют, то число вращения их композиции равно сумме их чисел вращения.

Рассмотрим семейство динамических систем на торе, моделирующее сильно шунтированный Джозефсоновский переход:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{1}{\omega}(\cos\theta + B + A\cos\tau) \\ \dot{\tau} = 1, \end{cases} \quad .$$

Здесь частота $\omega > 0$ фиксирована, а $(B, A) \in \mathbb{R}^2$ - параметры. Рассмотрим число вращения динамической системы на торе как функцию от параметров: $\rho := \rho(B, A)$. Напомним, что её множество уровня

$$L_r := \{(B, A) \mid \rho(B, A) = r\} \subset \mathbb{R}^2$$

называется *зоной фазового захвата,* если оно имеет непустую внутренность. Эффект квантования, открытый Бухштабером, Карповым и Тертычным (доказан в курсе), утверждает, что зоны захвата существуют только для целых чисел вращения.

4. Докажите, что $\rho(B, -A) = \rho(B, A) = -\rho(B, -A)$. Тем самым, каждая зона захвата L_r, $r \in \mathbb{Z}$, симметрична относительно оси B, а симметрия относительно оси A переводит её в зону L_{-r}.
Указание. Использовать результат задачи 1 и его аналог для потоков на торе.

5. Докажите, что каждая зона захвата L_r с ненулевым числом вращения r пересекает ось абсцисс B в точке с координатой $\pm\sqrt{r^2\omega^2 + 1}$, где знак совпадает со знаком числа вращения r.

6. Докажите, что нулевая зона захвата L_0

а) пересекает ось абсцисс B по отрезку $(-1, 1)$;

б) содержит квадрат с вершинами $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.

7. Докажите следующий эффект квантования числа вращения. Рассмотрим семейство динамических систем на двумерном торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2_{\theta,\tau}/2\pi\mathbb{Z}^2$,

$$\begin{cases} \dot{\theta} = a\cos n\theta + b + sf(\tau) \\ \dot{\tau} = 1, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

зависящее либо от параметров $b, s \in \mathbb{R}$ с фиксированным a, либо от трёх параметров b, s, a. Тогда в данном семействе зоны захвата существуют только для значений чисел вращения вида $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$.

8. а) Докажите, что:

а) Мёбиусово преобразование $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ сферы Римана $\overline{\mathbb{C}}$, $ad - bc = 1$, имеет параболический тип, т.е. имеет одну неподвижную точку, если и только если матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, имеет след $a + d$, равный ± 2, и не является тождественной с точностью до знака.

б) Если Мёбиусово преобразование отображает единичную окружность в себя с сохранением ориентации, то оно гиперболично если и только если соответствующая матрица с единичным определителем имеет след по модулю больше двух, и эллиптично если и только если модуль следа меньше двух.

Определим функции Бесселя $J_n(x)$ следующим образом:

$$e^{\frac{x}{2}(w - \frac{1}{w})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x) w^n.$$

Имеется в виду, что мы разлагаем экспоненту в левой части в её известный ряд, подставляем в него выражение для показателя (аргументы экспоненты) и группируем слагаемые по степеням комплексного переменного w. Рассмотрим случай комплексного переменного w с модулем 1: $w = e^{it}$.

9. Предполагая, что ряд в правой части можно почленно интегрировать по t (интеграл суммы равен сумме интегралов), выведите следующую формулу (использованную в исследовании модели Джозефсоновского перехода):

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin\tau)dt.$$

10. Используя предыдущее определение функции Бесселя через экспоненту, докажите следующие соотношения:

а) $J_n(-x) = (-1)^n J(x)$;

б) $J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$;

в) $J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) = -2J_n'(x)$.

г)* Используя определение через экспоненту и соотношения б), в), докажите, что функция Бесселя $y(x) := J_n(x)$ удовлетворяет уравнению Бесселя:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

11. а) Найдите общее решение линейной системы дифференциальных уравнений

$$Y' = \frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y.$$

б) Используя формулу для него, докажите, что в некотором базисе в пространстве решений оператор монодромии вдоль обхода вокруг нуля против часовой стрелки задаётся матрицей вида

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

в) Найдите формальную нормальную форму линейной системы в нуле.

г) Используя результат пункта б), покажите, что система не аналитически эквивалентна системе с диагональной матрицей в окрестности нуля. В частности, не аналитически эквивалентна своей формальной нормальной форме, и тем самым, хотя бы одна из её матриц Стокса нетривиальна. (На самом деле, у этой системы ровно одна из двух матриц Стокса нетривиальна. Это - более нетривиальная задача.)