Лекция 1. (развернутая версия)

Начнём, как водится, с определений.

Опр. 1 Целое число n, $n>1$, называется простым, если оно имеет лишь два делителя: единицу и само n. В противном случае целое $n>1$ называется составным.

Единица не причисляется ни к простым, ни к составным числам, что естесвенно в свете основной теоремы арифметики

Пример 1 Числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 — простые, числа 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20 — составные.

Обозначим для положительного x через $\pi(x)$ количество простых чисел, не превосходящих x. Очевидно, что функция $\pi(x)$ — кусочно-постоянная и неубывающая. Легко проверить (см. выше пример 1), что $\pi(1)=0$, $\pi(2)=1$, $\pi(5)=3$, $\pi(16{,}9)=6$, $\pi(17{,}1)=7$.

Знаменитая теорема Евклида — один из триумфов античной математики — утверждает, что множество простых чисел бесконечно или, что то же, $\pi(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$.

Гораздо более точную информацию о поведении $\pi(x)$ даёт так называемый асимптотический закон распределения простых чисел (или, короче, АЗРПЧ).

Наша ближайшая цель — познакомится с идеями, которые лежат в основе одного из его доказательств. Важным шагом на этом пути является знакомство с новым математическим объектом, главным героем нашего рассказа — дзета-функцией Римана.

Пусть $s=\sigma+it$ — комплексное число, где $\sigma=\mathrm{Re}\,s$, $t=\mathrm{Im}\,s$ — его вещественная и мнимая части s.

Опр. 2 Для s с условием $\sigma>1$ дзета-функция Римана $\zeta(s)$ определяется суммою ряда

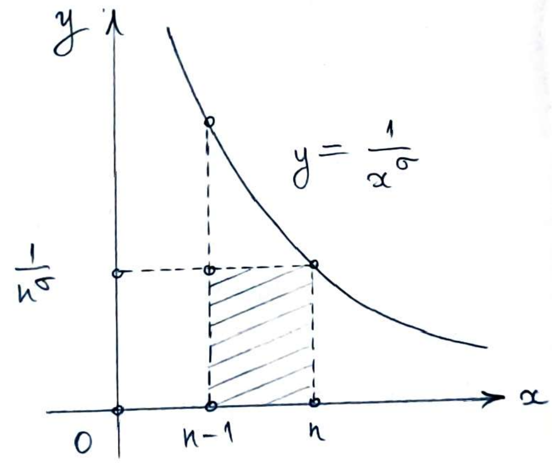
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}. \qquad (1)$$

Поскольку

$$\frac{1}{n^s}=\frac{1}{n^{\sigma+it}}=\frac{e^{-it\ln n}}{n^\sigma}, \text{ то } \left|\frac{1}{n^s}\right|=\frac{1}{n^\sigma}.$$

Рассматривая график функции $y=\frac{1}{x^\sigma}$ на отрезке $n-1\le x\le n$ (при $n\ge 2$), несложно убедиться в том, что

$$\frac{1}{n^\sigma}\le\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^\sigma}.$$



Следовательно,

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\right|\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\sigma}\le 1+\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^\sigma}=$$

$$=1+\frac{1}{\sigma-1}=\frac{\sigma}{\sigma-1}.$$

Поэтому ряд (1) сходится абсолютно в полуплоскости $\mathrm{Re}\,s>1$ и равномерно в любой полуплоскости вида $\mathrm{Re}\,s\ge 1+\delta$, $\delta>0$, и, по известной теореме Вейерштрасса, определяет в области $\mathrm{Re}\,s>1$ аналитическую функцию.

Имеет место

Теорема 1 (тождество Эйлера). В полуплоскости $\mathrm{Re}\,s>1$ справедливо равенство

$$\zeta(s)=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

где p пробегает подряд идущие простые числа.

Д-во. Пусть $X>2$ — целое число. Рассмотрим конечное про-

изведение
$$P_X(s) = \prod_{p \le X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Поскольку $\left|\frac{1}{p^s}\right| = \frac{1}{p^\sigma} \le \frac{1}{2^\sigma} < \frac{1}{2}$, то каждый из со-множителей $P_X(s)$ можно превратить в бесконечную геометрическую прогрессию:
$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots + \frac{1}{p^{\alpha s}} + \ldots,$$
Каждый из таких рядов сходится абсолютно, что позволяет нам перемножить их почленно:
$$P_X(s) = \prod_{p \le X} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots + \frac{1}{p^{\alpha s}} + \ldots\right) =$$
$$= 1 + \sum_n{}' \frac{1}{(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k})^s},$$
где штрих означает суммирование по всем возможным числам $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, в каноническое разложение которых входят только те простые, которые не превосходят X.(1) В силу основной теоремы арифметики, всякое $n \ge 2$ войдет в такую сумму либо с нулевым, либо с единичным коэффициентом, причём всякое n, $n \le X$, встретится в ней с коэффициентом 1. Значит,
$$P_X(s) = \sum_{n \le X} \frac{1}{n^s} + R_X(s),$$
где
$$|R_X(s)| \le \sum_{n > X} \frac{1}{n^\sigma} \le \int_X^{+\infty} \frac{dx}{x^\sigma} = \frac{X^{1-\sigma}}{\sigma - 1}.$$
Полученный результат можно записать в виде равенства
$$\prod_{p \le X} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n \le X} \frac{1}{n^s} + \frac{\theta \cdot X^{1-\sigma}}{\sigma - 1},$$

(1) Такие числа часто называют X-гладкими ("X-smooth numbers"). Интересно, что числа n, не делящиеся на простые p, $p \le X$, принято называть "X-грубыми" ("X-rough numbers").

где θ — некоторое комплексное число с условием $|\theta| \le 1$. Устремив X к бесконечности и замечая, что $1-\sigma<0$, получим требуемое. $\square$

Важный инструмент, необходимый для дальнейшего, даёт нам следующая

<u>Теорема 2</u> (формула суммирования Абеля). Пусть $a<b$ и пусть функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для произвольной последовательности комплексных чисел c_n, $a<n\le b$, справедливо тождество

$$\sum_{a<n\le b} c_n f(n) = \mathbb{C}(b)f(b) - \int_a^b \mathbb{C}(u) f'(u)\,du,$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{a<n\le u} c_n.$$

<u>Док-во</u> Имеем цепочку равенств:

$$\mathbb{C}(b)f(b) - \sum_{a<n\le b} c_n f(n) = \sum_{a<n\le b} c_n f(b) - \sum_{a<n\le b} c_n f(n) =$$

$$= \sum_{a<n\le b} c_n \left(f(b)-f(n)\right) = \sum_{a<n\le b} c_n \int_n^b f'(u)\,du.$$

Чтобы поменять местами сумму и интеграл, воспользуемся следующим трюком. Определим функцию $g(n;x)$ следующим образом:

$$g(n;u) = \begin{cases} 1, & \text{если } n\le u\le b, \\ 0, & \text{если } a\le u<n. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_n^b f'(u)\,du = \int_a^b f'(u)\,g(n;u)\,du,$$

и теперь наша сумма приводится к виду

$$\sum_{a<n\le b} c_n \int_a^b f'(u)\,g(n;u)\,du = \int_a^b f'(u)\left(\sum_{a<n\le b} c_n g(n;u)\right) du$$

Остаётся заметить лишь, что

$$\sum_{a<n\le b} c_n g(n;u) = \sum_{a<n\le u} c_n = \mathbb{C}(u). \quad \square$$

Выведем из Теоремы 2 полезное

Следствие (формула суммирования Эйлера). Пусть $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, где $\{\cdot\}$ – знак дробной доли. Тогда в условиях Теоремы 2 справедливо равенство

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(u)\,du + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(u)f'(u)\,du.$$

Док-во Полагая в формуле суммирования Абеля все члены последовательности c_n равными единице и замечая (проверьте это!), что

$$C(u) = [u]-[a] = u-a-\{u\}+\{a\} = u-a+\rho(u)-\rho(a),$$

после несложных преобразований получаем требуемое. $\square$

Упражнение 1 Постоянная Эйлера определяется равенством

$$\gamma = \lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N} - \ln N\right).$$

Докажите тождество: $\gamma = \frac{1}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{\rho(u)}{u^2}\,du$.

Упражнение 2 Проверьте следующие свойства функции $\rho(u)$:

(a) $\rho(u) = \rho(u+1)$ для любого u;

(b) $|\rho(u)| \le \frac{1}{2}$ для любого u;

(c) $\rho(n) = \frac{1}{2}$, $\rho(n+\frac{1}{2}) = 0$ для любого целого n;

(d) $\int_x^{x+1} \rho(u)\,du = 0$ для любого x;

Упражнение 3 Докажите ещё одну формулу суммирования: если $a<b$, а функция f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$, то справедливо равенство

$$\sum_{a<n\le b} f(n) = \int_a^b f(u)\,du + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \sigma(b)f'(b) + \sigma(a)f'(a) + \int_a^b \sigma(u)f''(u)\,du,$$

в котором $\sigma(u) = \int_0^u \rho(x)\,dx$.

Упражнение 4. Докажите следующее обобщение формулы суммирования Абеля. Пусть $a<b$ и пусть функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Пусть, далее, λ_n — произвольная неубывающая последовательность вещественных чисел отрезка $[a,b]$. Тогда для произвольной последовательности комплексных чисел c_n с номерами, отвечающими условию $a<\lambda_n\le b$, справедливо тождество:

$$\sum_{a<\lambda_n\le b} c_n f(\lambda_n) = \mathbb{C}(b)f(b) - \int_a^b \mathbb{C}(u)f'(u)\,du, \quad \text{где}$$

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{a<\lambda_n\le u} c_n .$$

Замечание. Утверждения такого типа рождаются не от хорошей жизни: в ряде задач приходится суммировать значения функций не по целым точкам, а по более хитрым последовательностям. Мы еще столкнемся с подобным явлением: роль чисел λ_n будут играть мнимые части так называемых нетривиальных нулей дзета-функции Римана.

Тождество Эйлера недвусмысленно указывает на связь дзета-функции с простыми числами. Чтобы раскрыть эту связь глубже и воспользоваться ею для исследования функции $\pi(x)$, необходимо продолжить $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость (за исключением, как увидим далее, точки $s=1$).
Избегая давать аккуратные определения, отметим, что под продолжением $\zeta(s)$ мы будем понимать отыскание некоторой "хорошей" (что бы это ни значило) функции $f(s)$, которая совпадала бы с $\zeta(s)$ во всей полуплоскости

$\operatorname{Re} s > 1$ и вместе с тем была бы определена в более широкой области (в идеале — во всей комплексной плоскости, за исключением одной точки).

Поясним сказанное таким примером. Рассмотрим в круге $|s| < 1$ функцию $g(s)$, определенную рядом

$$g(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \dots$$

Вопрос о том, чему равно $g(2)$ или $g(3+5i)$, смысла пока не имеет. Но можно заметить, что всюду в круге выполняется тождество

$$g(s) = \frac{1}{1-s} = G(s). \qquad (2)$$

Функция $G(s)$, в отличие от g, определена уже во всей комплексной плоскости, за исключением точки $s = 1$. Поэтому $G(s)$ продолжает $g(s)$ в область $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Теперь величинам $g(2)$ и $g(3+5i)$ можно придать смысл, положив

$$g(2) = G(2) = -1, \quad g(3+5i) = -\frac{2}{29} + \frac{5i}{29}.$$

Чтобы немного освоиться с новым понятием, рассмотрим сперва „модельную" задачу. Именно, научимся продолжать $\zeta(s)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$, $s \neq 1$. В рассмотренном выше примере ключевую роль сыграло наличие тождества (2). Теперь роль такого тождества сыграет

<u>Теорема 3</u> При любом s с условием $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{\rho(u)\, du}{u^{s+1}}.$$

<u>Док-во</u> Пусть $N > 1$ — целое число. Тогда, применяя формулу суммирования Эйлера наряду с результатами Упражнения 2, будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} = 1+\sum_{1<n\le N}\frac{1}{n^s} = 1+\int_1^N \frac{du}{u^s} + \frac{\rho(N)}{N^s} - \frac{\rho(1)}{1^s} +$$

$$+ s\int_1^N \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\,du = \left.\frac{u^{1-s}}{1-s}\right|_1^N + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N^s} +$$

$$+ s\left(\int_1^{+\infty} - \int_N^{+\infty}\right)\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\,du =$$

$$= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^{+\infty}\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\,du - \frac{N^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2N^s} - s\int_N^{+\infty}\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\,du.$$

Заметим, что

$$\left|\int_N^{+\infty}\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\,du\right| \le \frac{1}{2}\int_N^{+\infty}\frac{du}{u^{\sigma+1}} = \frac{1}{2\sigma N^\sigma}. \qquad (3)$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^{+\infty}\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\,du + \frac{1}{2N^s} - \frac{N^{1-s}}{s-1} + \frac{\theta|s|}{2\sigma N^\sigma},$$

$$|\theta|\le 1.$$

Поскольку $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 1$, при $N\to+\infty$ получаем:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s\int_1^{+\infty}\frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\,du. \quad \square$$

Из оценки (3) следует, что последний интеграл сходится абсолютно во всей полуплоскости $\mathrm{Re}\, s>0$. Таким образом, правая часть тождества Теоремы 3 определена в области $\mathrm{Re}\, s>0$, $s\neq 1$, и потому продолжает дзета-функцию в эту область.(2)

(2) Если бы правая часть тождества была определена во всей полуплоскости $\mathrm{Re}\, s>0$, то можно было бы говорить об аналитическом продолжении $\zeta(s)$. Наличие особенности — полюса первого порядка в точке $s=1$ — позволяет говорить о "мероморфном" продолжении $\zeta(s)$ в область $\mathrm{Re}\, s>0$. Разговор о том, что такое аналитические и мероморфные функции, и почему, скажем, интеграл в тождестве Теоремы 3 будет аналитической функцией переменной s, выходит за рамки этой брошюры.

Чтобы мероморфно продолжить $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость, введём ещё один объект

Определение 3. Функция

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

называется кси-функцией Римана.

Через $\Gamma(z)$ здесь и далее обозначается гамма-функция. Её можно определять различными способами, проверяя их эквивалентность. Для наших нужд вполне хватит следующих:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx \quad \text{(для } z \text{ с положительной вещественной частью)}, \qquad (4)$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \qquad (5)$$

(для произвольных z). Определение (5) хорошо тем, что позволяет увидеть особые точки гамма-функции "невооружённым взглядом". Ими будут полюса первого порядка в неположительных целых точках $z=-n$, $n=0,1,2,3,\dots$.

Имеет место

Теорема 4. В полуплоскости $\mathrm{Re}\, s>1$ справедливо равенство

$$\xi(s) = 1 + s(s-1)\int_1^{+\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{-\frac{s+1}{2}}\right)\omega(x)\,dx,$$

в котором

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} = e^{-\pi x}+e^{-4\pi x}+e^{-9\pi x}+\dots.$$

Д-во Воспользуемся интегральным представлением (4) для гамма функции:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-x}\,dx.$$

Пусть $n \geq 1$ — целое число. Положив в последнем интеграле $x = \pi n^2 y$, получим:

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} (\pi n^2 y)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} \pi n^2 \, dy =$$

$$= \pi^{\frac{s}{2}} n^s \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} \, dy, \text{ откуда}$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} = \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} \, dy.$$

Просуммируем обе части получившегося равенства по n:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 y} \, dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y} \right) dy = \int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} \omega(y) \, dy.$$

<u>Упражнение 5*</u> Попробуйте аккуратно обосновать законность перемены порядка суммирования и интегрирования.

Разобьем луч интегрирования на две части точкой $y = 1$ и в интеграле по отрезку $0 \leq y \leq 1$ сделаем замену $y = \frac{1}{x}$. Так получим:

$$\int_0^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} \omega(y) \, dy = \left(\int_0^1 + \int_1^{+\infty} \right) y^{\frac{s}{2}-1} \omega(y) \, dy =$$

$$= \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-1} \omega\left(\frac{1}{x}\right) dx + \int_1^{+\infty} y^{\frac{s}{2}-1} \omega(y) \, dy. \quad (6)$$

Чтобы двигаться дальше, необходимо знать закон, по которому преобразуется функция $\omega(y)$ при переходе от $y = x$ к $y = \frac{1}{x}$. Такой закон легко получить из так называемого функционального уравнения для тэта-функции. Именно, если определить тэта-функцию $\vartheta(y)$ равенством $\vartheta(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}$ (считая, что $y > 0$), то можно доказать (мы делать этого не будем), что

$$\vartheta\left(\frac{1}{y}\right) = \sqrt{y}\,\vartheta(y). \qquad (7)$$

Пользуясь очевидным равенством $\vartheta(y) = 1 + 2\omega(y)$, из (7) заключаем, что

$$\omega\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1) + \sqrt{x}\,\omega(x).$$

Соответствующий интеграл в правой части (6) теперь легко приводится к виду

$$\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{s+1}{2}}\,dx - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{s}{2}-1}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s+1}{2}}\omega(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \int_1^{+\infty} x^{-\frac{s+1}{2}}\omega(x)\,dx.$$

Но тогда

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\xi(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right)\omega(x)\,dx,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □.

Тождество теоремы 4 позволяет продолжить кси-функцию на всю комплексную плоскость. Действительно, ввиду неравенств

$$0 < \omega(x) = e^{-\pi x}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi(n^2-1)x} < e^{-\pi x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\pi n x} =$$

$$= \frac{e^{-\pi x}}{1 - e^{-\pi x}} < 2e^{-\pi x},$$ справедливых при любом

$x \geq 1$, интеграл, представляющий $\xi(s)$, будет сходящимся при любом s. Более того, этот интеграл не меняется при замене s на $1-s$ (проверьте это!) и то же, очевидно, справедливо для множителя $s(s-1)$.

Обозначая результат продолжения кси-функции Римана тем же символом $\xi(s)$, мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 5 Функция $\xi(s)$ определена во всей комплексной плоскости и удовлетворяет там равенству

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Замечание. Это равенство называют функциональным уравнением кси-функции (или дзета-функции) Римана.

Функции, аналитические во всей плоскости, называются целыми. Таким образом, целой является и кси-функция. Другими примерами целых функций будут $\sin \pi s$, $\cos \pi s$, e^s, e^{s^2}. Другим простейшим примером целой функции является многочлен. В силу основной теоремы алгебры, всякий многочлен $p(s)$, отличный от константы, можно представить в виде

$$p(s) = A s^m \prod_{n=1}^{k} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right), \qquad (8)$$

где $A \neq 0$ — постоянная, $m \geq 0$ — целое число (кратность нуля $p(s)$ в точке $s=0$), $a_1, \dots, a_k$ — отличные от нуля комплексные числа — нули $p(s)$ (возможно, совпадающие). Аналогом (8) для целых функций является следующая

Теорема 6 (Вейерштрасс) Любая целая функция f может быть представлена в виде

$$f(s) = e^{h(s)} s^m \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{s}{a_n}\right) \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{s}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n-1}\left(\frac{s}{a_n}\right)^{n-1} \right\},$$

где $h(s)$ — целая функция, $m \geq 0$ — целое число, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — нули f, занумерованные в порядке возрастания модулей: $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots$.

Если, далее, целое число $p \geq 0$ таково, что ряд

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|a_n|^{1+p}}$ сходится, то f представима и в виде

$$f(s) = e^{h_1(s)} s^m \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{s}{a_n}\right)\exp\left\{\frac{s}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{s}{a_n}\right)^2+\dots+\frac{1}{p}\left(\frac{s}{a_n}\right)^p\right\}.$$

$\square$

<u>Упражнение 6</u> Как выглядят произведения Вейерштрасса для функций $\sin \pi s$, $\cos \pi s$, e^s, e^{s^2}?

Можно показать (мы делать этого не станем), что в случае $f(s) = \xi(s)$ справедливы равенства $m=0$, $p=1$, $h(s) = as$, где a — некоторая постоянная. Поэтому, обозначая нули $\xi(s)$ символом ρ, получаем для кси-функции такое представление:

$$\xi(s) = e^{as} \prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}. \tag{9}$$

<u>Замечание</u>. Равенство (5) — нечто иное как произведение Вейерштрасса для целой функции $f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$.

Продолжая дзета-функцию Римана с помощью равенства

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{s-1} \cdot \frac{\xi(s)}{s\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \tag{10}$$

и пользуясь разложениями (5) и (9), получаем для нее представление вида

$$\zeta(s) = \frac{e^{As+B}}{s-1} \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \tag{11}$$

в котором $A = \ln\sqrt{\pi} + \frac{\gamma}{2} + a$, $B = -\ln 2$. Множитель $\frac{1}{s-1}$ ни с чем не сокращается (в отличие от множителя $\frac{1}{s}$ в (10)), и это отражает суть дела: в точке $s=1$ дзета функция имеет полюс первого порядка. Что, в свете расходимости гармонического ряда, не должно нас так уж сильно удивлять.

Из полученного представления $\zeta(s)$ несложно заключить, что дзета-функция Римана имеет:
а) простые нули в точках $s=-2n$ $(n=1,2,3,\dots)$
и b) нули в точках $s=\rho$. Первые называются вещественными, или тривиальными нулями. Про них всё известно и особых проблем математикам они не создают – в отличие от нулей ρ. Их принято называть комплексными(3), или нетривиальными нулями, и вот они-то и служат камнем преткновения для теоретико-числовиков вот уже полторы сотни лет.
Тем не менее, мы уже в силах сформулировать ряд простейших свойств нетривиальных нулей, а некоторые – даже доказать.

<u>Теорема 7</u>. Справедливы следующие утверждения:
1) если ρ – нетривиальный нуль $\zeta(s)$, то числа $1-\rho$, $\bar{\rho}$ и $1-\bar{\rho}$ также будут нулями $\zeta(s)$;
2) все нули ρ лежат в вертикальной полосе $0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1$;
3) ни один из нулей ρ не является вещественным числом; более того, $|\mathrm{Im}\,\rho| > 6\frac{1}{2}$ для любого нуля;
4) множество нулей ρ является бесконечным; более того, ряд $\sum\limits_{\rho} \frac{1}{|\rho|}$ расходится, однако при любом сколь угодно малом, но фиксированном $\varepsilon>0$ ряд $\sum\limits_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{1+\varepsilon}}$ сходится;
5) на всяком промежутке вида $(T; T+1]$, $T\ge 6$, содержится не более $c\ln T$ ординат(4) нулей ρ, где $c>0$ – некоторая абсолютная постоянная (ординаты берутся с учетом кратности).

(3) "Законность" этого наименования обосновывается Теоремой 7.
(4) Иногда мы будем позволять себе такую вольность – говорить не о мнимых частях нулей, а об их ординатах.

Док-во 1) В силу функционального уравнения, $\xi(1-\rho)=\xi(\rho)$. Далее, пользуясь равенством Теоремы 4 и тем, что $\overline{n^s}=n^{\bar s}$ для любого $n>0$, находим: $\overline{\xi(s)}=\xi(\bar s)$. Следовательно, $\xi(1-\bar\rho)=\xi(\bar\rho)=0$.

2) Пусть $\mathrm{Re}\, s=\sigma>1$. Домножим $\zeta(s)$ на произведение $Q_X(s)=\prod\limits_{p\le X}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$, где $X\ge 2$ - целое, и воспользуемся тождеством Эйлера. Получим:

$$\zeta(s)\,Q_X(s)=\prod_{p>X}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}=\prod_{p>X}\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right)=$$

$=1+\sum\limits_n{}'\frac{1}{n^s}$, где штрих означает суммирование по X-грубым числам, т.е. по тем n, все простые делители которых превосходят X.

Поскольку

$$\left|\sum_n{}'\frac{1}{n^s}\right|\le\sum_{n>X}\frac{1}{n^\sigma}\le\frac{X^{1-\sigma}}{\sigma-1},$$

то

$$|\zeta(s)\,Q_X(s)|\ge 1-\frac{X^{1-\sigma}}{\sigma-1}.$$

Беря по заданному σ величину X большей, чем $\max\left(2,\left(\frac{2}{\sigma-1}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}\right)$, получим:

$$\frac{X^{1-\sigma}}{\sigma-1}\le\frac{1}{2},\qquad |\zeta(s)\,Q_X(s)|\ge 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,$$

поскольку функция $Q_X(s)$ не имеет полюсов (и потому не может "проглотить" ни один из нулей дзета-функции), из последнего неравенства заключаем: $\zeta(s)\ne 0$. поскольку s - произвольное число с условием $\mathrm{Re}\, s>1$, для всякого нуля ρ будем иметь: $\mathrm{Re}\,\rho\le 1$. В силу п.1) отсюда немедленно заключаем, что $\mathrm{Re}\,\rho\ge 0$.

3) Покажем сперва, что $\zeta(s)$ не обращается в нуль на интервале $0<s<1$. Согласно Теореме 3, для таких s имеем:

$$\xi(s) = -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} + s\int_1^{+\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}}\,du \le -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{du}{u^{s+1}}$$

$$= -\frac{1}{1-s} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{s}{1-s} < 0.$$

Далее, замечая, что $\xi(0) = 1$ и полагая $s=0$ в равенстве (11), находим: $\xi(0) = -e^{B} = -\frac{1}{2} \ne 0$.

Доказательство оставшейся части п. 3) излагается ниже в серии упражнений.

4) Если бы ряд $\sum\limits_{\rho} \frac{1}{|\rho|}$ был сходящимся, тогда для кси-функции Римана при любом s была бы справедлива следующая оценка:

$$|\xi(s)| \le e^{|a||s|} \prod_{\rho} \left(1 + \frac{|s|}{|\rho|}\right) e^{\left|\frac{s}{\rho}\right|} \le$$

$$\le e^{|a|\cdot|s|} \prod_{\rho} e^{\frac{|s|}{|\rho|}} \cdot e^{\frac{|s|}{|\rho|}} = e^{|a|\cdot|s|}\cdot \exp\left\{2|s|\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|}\right\} =$$

$$\le e^{c|s|}, \text{ где } c = |a| + 2\sum_{\rho}\frac{1}{|\rho|} \text{ — постоянная.}$$

Однако выбор s в виде $s = s_n = 2(n+1)$, где $n > (\pi e)^2$ — целое число, дает:

$$\xi(s_n) = (2n+1)(2n+2)\,\pi^{-(n+1)}\,\Gamma(n+1) > \frac{n^2}{\pi^n}\, n! >$$

$$> \left(\frac{n}{\pi e}\right)^n > (\sqrt{n})^n = e^{\frac{1}{2} n \ln n} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{s_n}{2} - 1\right)\ln\left(\frac{s_n}{2} - 1\right)\right\} > \exp\left\{\frac{1}{6} s_n \ln\frac{s_n}{3}\right\},$$

что при достаточно большом n противоречит неравенству $\xi(s_n) \le e^{c|s_n|}$.

Сходимость ряда $\sum\limits_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{1+\varepsilon}}$ несложно вывести из свойства 5), которое мы оставим без доказательства. В силу свойства 1), достаточно доказать сходимость ряда по нулям с положительной мнимой частью. Пользуясь свойством 3), находим (далее полагаем $\rho = \beta + i\gamma$):

$$\sum_{\rho:\gamma>0}\frac{1}{|\rho|^{1+\varepsilon}} \le \sum_{\rho:\gamma>0}\frac{1}{\gamma^{1+\varepsilon}} = \sum_{n=6}^{+\infty}\ \sum_{n<\gamma\le n+1}\frac{1}{\gamma^{1+\varepsilon}} \le$$

$$\le \sum_{n=6}^{+\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\sum_{n<\gamma\le n+1} 1 .$$ В силу свойства 5), внутренняя сумма не превосходит $c\ln n$. Значит, исходный ряд мажорируется сходящимся рядом $c\sum_{n=6}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^{1+\varepsilon}}$. □.

Замечание. Свойство 5) является следствием так называемой формулы Римана-Мангольдта для $N(T)$ — числа нулей $\zeta(s)$, лежащих в прямоугольнике $0\le \operatorname{Re} s\le 1$, $0<\operatorname{Im} s\le T$. В своём простейшем варианте эта формула имеет вид

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \Delta(T),$$

где $\Delta(T) = O(\ln T)$ при $T\to+\infty$.

Её доказательство опирается, помимо прочего, на теорему Коши о вычетах, функциональное уравнение $\xi(s)$ и формулу Стирлинга для гамма-функции в комплексной плоскости.

Интересно отметить, что остаточный член $\Delta(T)$ тесно связан с особой функцией $S(T)$ — аргументом $\zeta(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Не вдаваясь в подробности, скажем лишь, что именно функция $S(T)$ "отвечает" за разного рода "нерегулярности" в распределении ординат нулей $\zeta(s)$.