Thursday, July 27, 2023 1:15 AM

Характеры и разностные уравнения

$$\pi: \; G \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

группа

$$\chi(g) = \operatorname{tr} \pi(g) = \operatorname{tr}_V g \in \mathbb{C}$$

1) инвариантна отн. сопряжений $\chi(aba^{-1}) = \chi(b)$
2) удовлетворяет уравнениям

предположим что V неприводимо

$$C_a = \sum_{g \sim a} g \in \mathbb{C}G$$

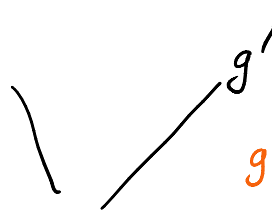
$$h C_a h^{-1} = C_a$$

$$\pi(h)\,\pi(C_a)\,\underbrace{\pi(h)^{-1}}_{\pi(h^{-1})} = \pi(C_a) \implies \pi(C_a) = c_a \cdot 1_V$$

$$\operatorname{tr}\, \pi(C_a)\,\pi(h) = c_a \cdot \chi(h) = \sum_{g\sim a} \chi(gh)$$

$$\operatorname{tr}\, \pi(C_a)\,\pi(h) = \sum_{g\sim a} \pi(g)\,\pi(h), \qquad \pi(g)\,\pi(h) = \pi(gh)$$

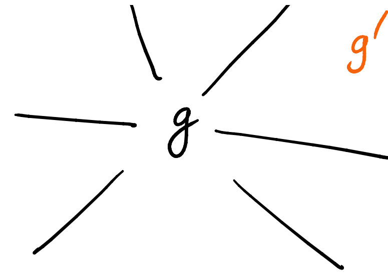
$$\int_{g\sim a} \chi(gh)$$



система образующих

$g' = e_i g$

$\pi(gh)$



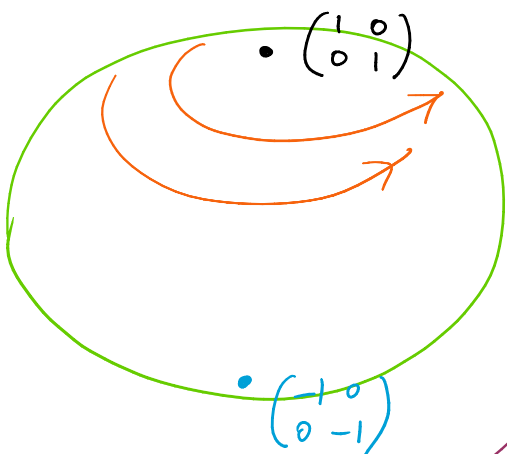
$g' = e_i g$

Если G группа Ли

например $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar\beta \\ \beta & \bar\alpha \end{pmatrix} \right\}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

S^3 в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$



$\alpha = 1$ $\beta = 0$

Собственные функции оператора Лапласа удовлетворяют

- $\Delta f = \lambda f$ $\quad \Delta = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$
- $\int_{|y-x|=r} f(y) = \lambda_r f(x)$

Это есть "сумма" по $f(gx)$ $\quad g \in \begin{pmatrix} e^{ir} & 0 \\ 0 & e^{-ir} \end{pmatrix}$

центр групповой алгебры

центр универсальной обёртывающей алгебры

||

инвариантные дифф. операторы на группе

Характеры неприводимых представлений удовлетворяют разностным и дифф. уравнениям которые происходят из центра дифф. уравнениям, которые происходят из центра групповой алгебры и инв. дифф. операторов на группе.

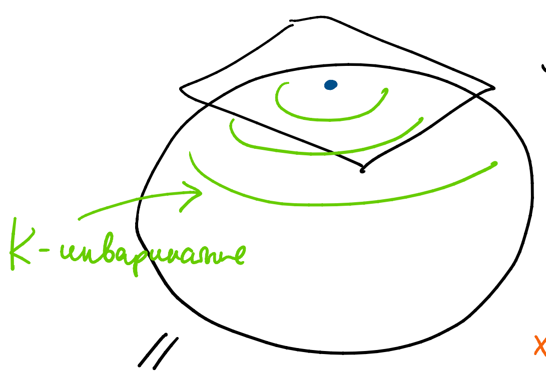
Группы, Представления, характеры → некоторые замечательные дифф & разностные уравнения

↓ ↓

симм. пространства, сферические функции, .. ⟷ интересные обобщения

↓ ↓

? ⟷ ещё более интересные обобщения.



$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$\parallel$

G/K

$SO(n,\mathbb{R})/SO(n-1,\mathbb{R})$

стабилизатор точки

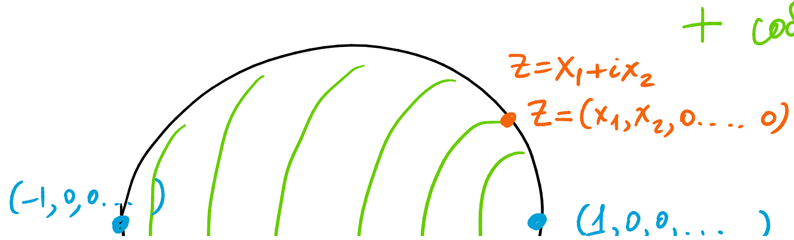
характеры заменяются на сферические функции

$\parallel$

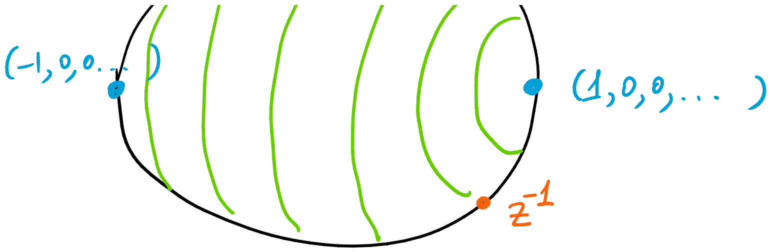
K-инвариантные функции на G/K

= функции на $K\backslash G/K$

\+ собственные функции инв. дифф. операторов.



функции от z инв. отн. $z \to z^{-1}$



функции от z инв. отн. $z \to z^{-1}$

т.е. функции от $z+z^{-1}$

собственные отн.

$$\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 + \underbrace{\ldots\ldots}\,\frac{\partial}{\partial z} + 0 = \Delta$$

Δ самосопряжен относительно

$$\big(f_1(z), f_2(z)\big) = \int f_1(z)\,\overline{f_2(z)}\,\underbrace{\qquad\qquad}\,\frac{dz}{2\pi i z}$$

объем S^{n-2} радиуса $\operatorname{Im} z$

$$\big((1-z^2)(1-z^{-2})\big)^{\frac{n-2}{2}}$$

параметр.

частный случай гипергеометр. уравнения.

Гипергеометрические функции связанные с системами корней

$\hookrightarrow$ Heckmann + Opdam, + ...

$\downarrow$

Многочлены Макдональда + Чередник + ...

$$(1-z^\alpha)^{m_\alpha}$$

$$(1-z)^5 \sim (1-z)(1-qz)\ldots(1-q^4z) = \frac{\overbrace{\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^iz)}^{\varphi(z)}}{\prod_{i=0}^{\infty}(1-q^5q^iz)} = \frac{\varphi(z)}{\varphi(q^5z)}$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \Gamma_q(z)$$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \Gamma'_q(z)$$

$i=0$

группы, характеры и т.п.

собств. функции операторов Лапласа на группе.

геометрическая реализация представлений

qq-характер

собственные функции разностных операторов типа Макдональда

интересные свойства категории представлений

есть полюса и т.п.

N. Chriss & V. Ginzburg