Разбиения многообразий на ручки.
В сторону теоремы об h-кобордизме

Задачи к лекции 2:

Гомотопические эквивалентности и кобордизмы

21 июля 2023

Задача 1. (a) Покажите, что проективная плоскость не нулькобордантна (т. е. не является краем никакого трёхмерного многообразия)[1]. **(b)** Покажите, что бутылка Клейна нулькобордантна.

Задача 2. Напомним, что если вырезать в двух n-многообразиях M и M' по маленькому шару и склеить между собой границы образовавшихся дырок, то полученное многообразие $M\#M'$ называется *связной суммой* M и M'. Покажите, что $M\#M'$ кобордантно $M \sqcup M'$.

Задача 3. Приведите пример гомотопически эквивалентных, но не гомеоморфных многообразий с краем.

Задача 4. Приведите пример многообразия с краем L, гомотопически эквивалентного своему краю, но такого что вложение $\partial L \to L$ не является гомотопической эквивалентностью.

Задача 5. (a) Пусть K — связное n-многообразие с краем. Покажите, что если вырезать из внутренности K маленький шар, то результат будет гомотопически эквивалентен букету $K \vee S^{n-1}$.

(b) Более общо, покажите что для любых n-многообразий с краем M_1 и M_2 связная сумма $M_1\#M_2$ гомотопически эквивалентна букету $M_1 \vee M_2 \vee S^{n-1}$.

Задача 6. Предположим, многообразие M гомотопически эквивалентно S^n. Докажите, что M с двумя вырезанными шарами гомотопически эквивалентно S^{n-1}.

[1] *Указание:* можно воспользоваться тем, что значение $w_2(\mathbb{RP}^2)$ на фундаментальном классе $[\mathbb{RP}^2]$ не равно нулю.