Разбиения многообразий на ручки.
В сторону теоремы об h-кобордизме

Задачи к лекции 3:
Трасверсальность и теоремы Уитни

22 июля 2023

Задача 1. (a) Докажите, что если $K, L \subset M$ — трансверсально пересекающиеся подмногообразия, то $K \cap L$ — гладкое подмногообразие в M.

(b) Докажите, что если $\varphi : K \to M$ и $\psi : L \to M$ — трансверсальные отображения, то $\varphi^{-1}(\psi(L))$ — гладкое подмногообразие в K.

Определение. Значение y функции $f : M \to \mathbb{R}$ называется *регулярным*, если для любого $x \in M$, такого что $f(x) = y$, имеем $df_x \neq 0$.

Задача 2. Любой ли набор кривых на торе является прообразом регулярного значения некоторой гладкой функции?

Определение. Отображение многообразий $f : K \to M$ называется *погружением*, если $\ker df_x = 0$ для всех $x \in K$. При этом обычно подразумевается, что $\dim K < \dim M$.

Когда говорят про *гладкие вложения*, они по умолчанию предполагаются погружениями (т. е. вложениями в качестве подмногообразия).

Задача 3. Докажите, что если $f : K \to \mathbb{R}^n$ — погружение и $\dim K < n - 2$, то группа $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus f(K))$ тривиальна.

Задача 4. Возьмём в каждой точке $x \in M$ множество всех одномерных подпространств в T_xM. Все они образуют *проективизацию касательного расслоения* к M, она является гладким многообразием размерности $2m - 1$. Обозначим её $\mathbb{P}TM$.

Пусть $f : M \to \mathbb{R}^n$ — погружение, причём $n > 2m$.

(a) Построим естественное отображение $\mathbb{P}TM \to \mathbb{RP}^{n-1}$. Выведите[1], что существует точка $l \in \mathbb{RP}^{n-1}$, не лежащая в образе этого отображения.

(b) Докажите, что существует проекция $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, такая что композиция $p \circ f$ снова является погружением.

Задача 5. Приведите пример n-мерного многообразия, не вложимого в евклидово пространство размерности меньше $2n$.

[1] например, из леммы Сарда