

Разбиения многообразий на ручки. В сторону теоремы об h -кобордизме

Памятка про многообразия¹

Бывают разные категории многообразий:

- топологические многообразия (хаусдорфово пространство со счётной базой, локально гомеоморфное \mathbb{R}^n для фиксированного n);
- триангулированные многообразия (симплициальный комплекс, геометрическая реализация которого является топологическим многообразием; отношение эквивалентности порождается элементарными подразбиениями триангуляции);
- кусочно-линейные многообразия = PL-многообразия = комбинаторные триангуляции (линк каждого симплекса является комбинаторной триангуляцией сферы, таким образом комбинаторные триангуляции определяются индуктивно по n);
- гладкие многообразия (атлас с гладкими функциями перехода).

Любое гладкое многообразие допускает PL-структуру, единственную с точностью до комбинаторной эквивалентности (для C^1 -многообразий это доказал Уитни [W], для C^r -многообразий см. приложение к [MS]). Остальные редукции снизу-вверх тривиальны. Как оказывается, никакие из обратных редукций в общем случае неверны.

Существуют топологические многообразия, не допускающие PL-структуры (в размерности 4, см. [F], и в размерности ≥ 5 , см. [KS]). Более того, существуют вообще не триангулируемые топологические многообразия (в размерности 4 подходит то же многообразие E_8 из [F], для размерностей ≥ 5 это доказано в [Ma] относительно недавно). Также существуют топологические многообразия (например, \mathbb{R}^4), имеющие несколько комбинаторно неэквивалентных триангуляций.

В размерности ≥ 5 существуют триангулированные топологические многообразия, не допускающие комбинаторной триангуляции (и даже не гомотопически эквивалентные никакому PL-многообразию). Это следует из теоремы о двойной надстройке, см., например, [E]. В размерности ≤ 4 все триангуляции топологических многообразий являются комбинаторными.

Наконец, в размерности ≥ 7 PL-многообразие может иметь различные гладкие структуры [Mi], а в размерности ≥ 8 существуют PL-многообразия, не допускающие ни одной гладкой структуры [Ke]. Известно, что оценки на размерность точны.

В размерности ≤ 3 , к счастью, между четырьмя приведёнными категориями многообразий нету подобных различий, чем в частности обеспечена относительная простота маломерной топологии, см., например, [H] и [L]. В смысле сложных и не до конца изученных патологий размерность 4 остаётся самой интересной, см., например, книги [GS] и [S], свежие русские переводы которых продаются в киоске МЦНМО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [E] R. D. Edwards, *Suspensions of homology spheres*, preprint (1970)
- [F] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom., 17 (1982), no. 3, 357–453
- [GS] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, AMS, Providence, RI, 1999
- [H] A. Hatcher, *The Kirby Torus Trick for Surfaces*, preprint (2013)
- [Ke] M. A. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Commentarii Mathematici Helvetici, 34 (1960), 257–270
- [KS] R. C. Kirby, L. C. Siebenmann, *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations*, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1977)
- [L] J. Lurie, *Topics in Geometric Topology*, lecture notes (2009)
- [Ma] C. Manolescu, *Pin(2)-equivariant Seiberg–Witten Floer homology and the Triangulation Conjecture*, J. Amer. Math. Soc., 29 (2016), 147–176
- [Mi] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. 64 (1956), 399–40, есть перевод
- [MS] Дж. Милнор, Дж. Сташеф, *Характеристические классы* (С приложением работы Дж. Манкрса *Элементарная дифференциальная топология*), М., Мир, 1979
- [S] A. Scorpan, *The wild world of 4-manifolds*, AMS, Providence, RI, 2005
- [W] J. H. C. Whitehead, *On C^1 -complexes*, Ann. of Math., v. 41 (1940), pp. 809–82

¹Если у вас есть замечания или добавления к этому короткому обзору, смело пишите мне на ryabichev@179.ru