

Задачи Г.Б. Шабата к лекции 1

1.1. Сколько слагаемых N ряда $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$, надо взять, чтобы вычислить эту сумму с точностью до миллионных? Пользуясь доступными вам средствами, проверьте равенство $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ с точностью до миллионных.

1.2. Строго докажите равенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) \dots$$

(скобки в правой части соответствуют простым числам), интерпретируя его левую и правую части как фундаментальные последовательности рациональных чисел.

1.3*. Возьмите десять случайных пар натуральных чисел – например, разбейте произвольным образом на пары двадцать номеров телефонов ваших знакомых. Предскажите, у скольких из них найдётся нетривиальный общий делитель. Проверьте предсказание.

1.4*. Введите для положительного натурального $n \in \mathbb{N}$ множество

$$\text{COPRIME}_n := \{(a, b) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \mid a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\}$$

пар взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих n . Докажите, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\text{COPRIME}_n}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Найдите такое N , что при любом натуральном $n > N$

$$.6 < \frac{\#\text{COPRIME}_n}{n^2} < .62$$

1.5. Докажите тождество

$$-\int_0^x \frac{\log(1-t)dt}{t} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

при $0 \leq x < 1$. Обоснуйте законность почленного интегрирования.

1.6. Свяжите $\zeta(s, \frac{1}{2})$ с $\zeta(s)$. Вычислите $\zeta(2, \frac{1}{2})$ и примените к полученному результату формулы (1.02j) и (1.02k).