Задачи Г.Б. Шабата к лекции 3

3.1. Проверьте, что для любого поля $\Bbbk$ и любой конечно-разложимой полугруппы $(\mathcal{N}, \odot)$ множество $\Bbbk^{\mathcal{N}}$ с покомпонентным сложением и умножением $*_{\odot}$ является коммутативной $\Bbbk$-алгеброй.

3.2. Докажите, что базу окрестностей 0 во введённой в лекции топологии алгебры $\mathrm{Dir}(\Bbbk)$ образуют множества $U_N := \{\sum_{n=N}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\}$ при $N = 1, 2, 3, \ldots$.

3.3. Пользуясь результатом предыдущей задачи, придайте точный смысл равенству в эйлеровом тождестве

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \lambda(p) p^{-s}}$$

где $\lambda : (\dot{\mathbb{N}}, \times) \longrightarrow (\Bbbk, \times)$ – произвольный морфизм полугрупп.

3.4. Докажите формулу, касающуюся кольца гауссовых чисел

$$\zeta_{\mathrm{spec}(\mathbb{Z}[\mathrm{i}])}(s) = \sum_{(m,n) \in \left((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0,0)\}\right)} \frac{1}{(m^2 + n^2)^s}.$$

Попытайтесь выразить эту функцию через что-нибудь известное вам.

3.5. *Поверхности дель Пеццо* получаются раздутием k находящихся *в общем положении* точек плоскости, где $k \in \{1, \ldots, 9\}$. Выведите общую формулу для количеств точек на поверхностях дель Пеццо над конечными полями. Примените её для проверки формулы (7.2.2c).

3.6. *Кубические поверхности* можно получить, раздувая шесть *не лежащих на общей конике* точек проективной плоскости – см. [**?**], [**?**]. Пользуясь результатами предыдущей задачи, вычислите дзета-функцию кубической поверхности.

3.7*. Рассмотрите кубическую поверхность $\mathbf{X}$, заданную в $\mathbf{P}_3$ уравнением

$$x^3 + y^3 = z^3 + w^3.$$

Развив подходящие соображения о *суммах двух кубов* над конечными полями, вычислите $\#\mathbf{X}(\mathbb{F}_5)$, $\#\mathbf{X}(\mathbb{F}_{25})$ и $\#\mathbf{X}(\mathbb{F}_{125})$. Примените эти результаты над $\mathbb{F}_5$ к вычислению начальных членов ряда $\mathsf{Z}_{\mathbf{X}} \in \mathbb{Q}[[t]]$.