

О дзета-функциях

Дубна, 2023

Лекция 2, 20 июля

Вещественная теория дзета-функции Римана

Версия 21 июля 2023

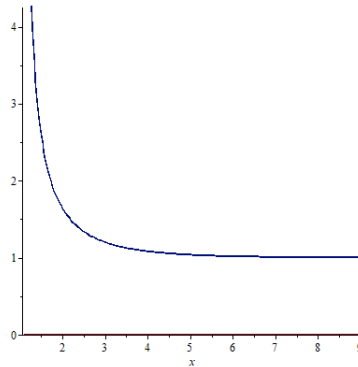
2.0. Очевидная часть дзета-функции $\zeta : \mathbb{R}_{>1} \rightarrow \mathbb{R}$	1
...2.0.0. Сходимость и график	1
...2.0.1. Приближение суммы интегралом	2
2.1. Сумма, интеграл и $\zeta_1(s) := \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$	2
...2.1.0. Определение	2
...2.1.1. $\zeta_1(1)$	3
...2.1.2. Основная формула	3
...2.1.3. ζ на критическом интервале	4
...2.1.4. Более удобный вид	4
2.2. Функция ζ^\pm	5
...2.2.0. Определение и связь с $\zeta(s)$	5
...2.2.1. Сходимость	5
...2.2.2. Численный пример	6
2.3. ВЕЩЕСТВЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $s \mapsto \zeta(s)$ НА КРИТИЧЕСКОМ ИНТЕРВАЛЕ $0 < s < 1$	7
...2.3.0. Установка	7
...2.3.1. Сдвиг вниз на $\frac{1}{2}$	7
...2.3.2. Напоминания о рядах Фурье	8
...2.3.3. Главное преобразование	9
...2.3.4. Оставшийся интеграл	11
...2.3.5. Всё вместе	14
Приложение А. $\zeta(2^k)$ при $k \rightarrow \infty$ и приближения π	16
...П2А.0. Скорость приближений $\zeta(s)$ конечными суммами	17
...П2А.1. Рекурренции для $\zeta(2m)$ при $m \in \mathbb{Z}$	17
...П2А.2. Приближение π	18
Приложение Б. Гамма-функция	19
...П2Б.0. Определение	19
...П2Б.1. Нули и полюса	20
...П2Б.2. Разложение в произведение	21
...П2Б.3. Формула отражения	21
...П2Б.4. Формула удвоения	22
Литература	23 ..

2.0. Очевидная часть дзета-функции $\zeta : \mathbb{R}_{>1} \rightarrow \mathbb{R}$

2.0.0. Сходимость и график. Сегодня мы будем работать с дзета-функцией и с некоторыми близкими к ней как с функциями *вещественной* переменной $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Итак, рассмотрим при $s > 1$ сходящийся ряд

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (2.0.0a)$$

График этой функции



не показывает ничего неожиданного. Очевидны асимптоты

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \zeta(s) = 1 \quad (2.0.0b)$$

и

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = \infty. \quad (2.0.0c)$$

С обеими, однако, связана интересная математика.

Использование асимптоты (2.0.0b), то есть поведения $\zeta(x)$ при $s \rightarrow \infty$, несколько отклоняется от основной линии наших рассмотрений и потому вынесено в Приложение. С асимптотой (2.0.0c) – точнее, с приближением

$$\zeta(s) \approx \frac{1}{s-1} \text{ при } s \rightarrow 1$$

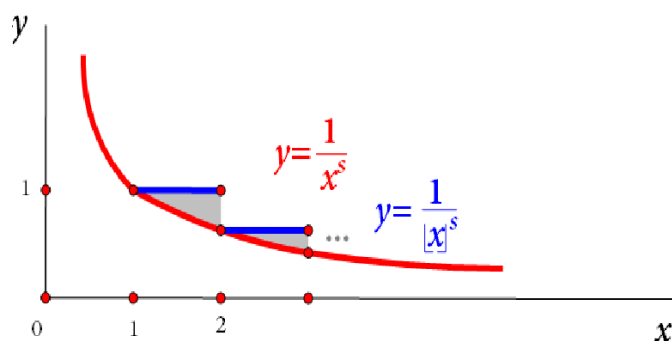
связаны наши основные планы на сегодня. Для верности рекомендуется решить задачи **2.1** и **2.2**.

2.0.1. Приближение суммы интегралом. Идея заключается в использовании при $s > 1$ приближения

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \approx \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1},$$

мотивирующего *регуляризацию*

$$\boxed{\zeta_1(s) := \zeta(s) - \frac{1}{s-1}} \quad (2.0.1a)$$



Эта функция окажется регулярной при $s > 0$.

2.1. Сумма, интеграл и $\zeta_1(s) := \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$

2.1.0. Определение. Оно приведено в заголовке и пока имеет смысл лишь при $s > 1$. Тем не менее эта функция – залог *аналитического продолжения* дзета-функции Римана.

Первый шаг – преодоление особенности в $s = 1$.

2.1.1. $\zeta_1(1)$. Оказывается, существует

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta_1(s) =: \gamma = .577215\dots$$

Это – более или менее определение одной из констант Эйлера (см. её красивое новое определение в citeMach)

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\log n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Так что полагаем

$$\zeta_1(1) := \gamma \tag{2.1.1a}$$

Это – раскрытие неопределённости типа $\infty - \infty$ при $s = 1$ в (2.0.1a). См. задачу **2.2**.

2.1.2. Основная формула. Мы определим $\zeta_1(s)$ при всех $s \geq 0$.

Будем пользоваться современным обозначением *целой части* вещественного числа

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

(а не $\{x\}$, как во многих учениках) и обозначением *дробной части* вещественного числа

$$\langle x \rangle := x - [x]$$

(а не $\{x\}$, как во многих учениках, в которых игнорируется тот факт, что это – обозначение одноэлементного множества).

Теорема. При $s > 1$ имеет место тождество

$$\zeta_1(s) \equiv 1 - s \int_1^\infty \frac{\langle x \rangle dx}{x^{s+1}} \quad (2.1.2a)$$

Доказательство. (Ср. [Титчмарш2010]) Для краткости мы проведём его методом "кролика из шляпы". Преобразуем заимствованный из правой части уравнения (2.1.2a) интеграл, полагая (пока!) $s > 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\langle x \rangle dx}{x^{s+1}} &= \int_1^\infty \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}} dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} \frac{x - n}{x^{s+1}} dx = \\ &= \sum_{n=1}^\infty \left(\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} - n \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}} \right) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} - \sum_{n=1}^\infty n \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^{s+1}} = \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \sum_{n=1}^\infty n \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) = \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \left(1 \cdot \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \right) + \dots \right). \end{aligned}$$

Произведя очевидные сокращения¹, получим

$$\int_1^\infty \frac{\langle x \rangle dx}{x^{s+1}} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \zeta(s),$$

откуда требуемая формула получается элементарным преобразованием. ■

2.1.3. ζ на критическом интервале. Обычно изучается дзета-функция комплексного аргумента $s \in \mathbb{C}$, и наибольший интерес представляет её поведение в так называемой *критической полосе*, при $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$. Занимаясь (нетрадиционным) вещественным анализом дзета-функции, мы вводим соответствующий нестандартный термин, называя *критическим интервалом* интервал $0 < s < 1$.

Главное для нас (очевидное) утверждение заключается в том, что

правая часть формулы (2.1.2a) имеет смысл при $0 < s < 1$.

Это позволяет продолжить функцию ζ_1 , а вместе с ней и ζ , на критический интервал.

¹Этот приём называется *суммированием по Абелю*.

Определение-утверждение. Функция ζ_1 , определённая в критическом интервале формулой (2.1.2a),

$$\zeta_1(s) = 1 - s \int_1^\infty \frac{\langle x \rangle dx}{x^{s+1}},$$

является вещественно-аналитической при всех $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Эта формула позволяет ввести в критической полосе также

$$\zeta(s) := \zeta_1(s) - \frac{1}{1-s},$$

то есть при $0 < s < 1$

$$\boxed{\zeta(s) := \frac{s}{1-s} - s \int_1^\infty \frac{\langle x \rangle dx}{x^{s+1}}} \quad (2.1.3a)$$

Доказательство. Элементарные преобразования. ■

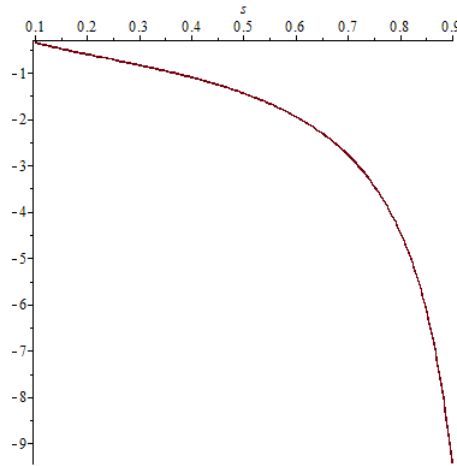
2.1.4. Более удобный вид. Остаётся последний шаг. В нём используется при $0 < s < 1$ тождество

$$\frac{s}{1-s} = -s \int_0^1 \frac{dx}{x^s} = -s \int_0^1 \frac{x dx}{x^{s+1}} = -s \int_0^1 \frac{\langle x \rangle dx}{x^{s+1}},$$

с помощью которого формула (2.1.3a) переписывается в виде

$$\boxed{\zeta(s) = -s \int_0^1 \frac{\langle x \rangle dx}{x^{s+1}}} \quad (2.1.4a)$$

Вот график полученной вещественной функции:



Например, приближённо вычисляется

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1.460354. \quad (2.1.4b)$$

Напомним, что это число интерпретируется как *кажущаяся расходящаяся* сумма

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

Похожее вычисление предлагается провести в задаче **2.6**.

2.2. Функция $\zeta^\pm(s)$

2.2.0. Определение и связь с $\zeta(s)$. Следуя Эйлеру, введём *знакопеременную* дзету

$$\zeta^\pm(s) := 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} \pm \dots \quad (2.2.0a)$$

Предложение. При $s > 1$ две дзеты связаны соотношением

$$\zeta^\pm(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \quad (2.2.0b)$$

Проверка.

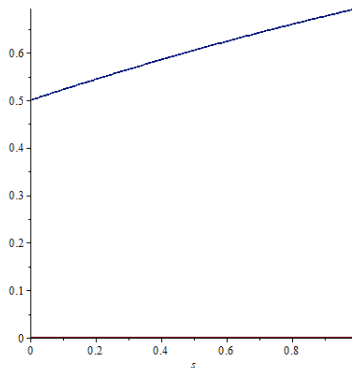
$$\begin{aligned} \zeta^\pm(s) &:= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\right) - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots\right) = \\ &= \zeta(s) - \frac{2}{2^s}\left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots\right) = \zeta(s) - 2^{1-s}\zeta(s) = \\ &= (1 - 2^{1-s})\zeta(s) \blacksquare. \end{aligned}$$

2.2.1. Сходимость. Как было известно ещё Эйлеру, знакопеременная дзета обладает важным преимуществом перед обычной:

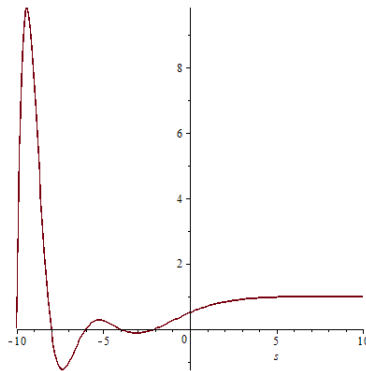
Утверждение. Ряд (2.2.0a), определяющий функцию ζ^\pm , (условно) сходится при любом $s > 0$.

Проверка. Лёгкое упражнение для первокурсника – см. задачу **2.7**. ■

График функции ζ^\pm на критическом отрезке $[0, 1]$ малоинтересен:



Она, однако, как мы вскоре убедимся, представляет собой *целую* вещественную функцию, и её поведение, скажем, на отрезке $[-10, 10]$ довольно выразительно:



2.2.2. Численный пример. С помощью компьютера вычисляем²

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = .605\dots$$

В согласии с формулой (2.2.0b) это подтверждает полученное выше (см. (2.1.4b)) значение

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = -1.46\dots$$

с точностью до сотых.

Узнав о дзета-функциях больше, мы сможем проверять такого рода равенства с любой точностью.

Ещё одно вычисление предлагается провести в задаче **2.8**.

2.3. ВЕЩЕСТВЕННОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА КРИТИЧЕСКОМ ИНТЕРВАЛЕ

2.3.0. Установка. Работаем с определённой выше функцией вещественной переменной

$$\zeta(s) := -s \int_0^{\infty} \frac{\langle x \rangle dx}{x^{s+1}} \quad (2.3.0a)$$

при $0 < s < 1$ в надежде обнаружить связь

$$\zeta(s) \overset{?}{\longleftrightarrow} \zeta(1-s).$$

2.3.1. Сдвиг вниз на $\frac{1}{2}$. Объясним эту операцию озарением:

$$\zeta_1(s) = \frac{1}{2} - s \int_1^{\infty} \frac{\langle x \rangle - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx. \quad (2.3.1a)$$

Добились мы того, что под знаком интеграла оказалась нечётная периодическая функция. Такие функции разлагаются в *ряды Фурье* по синусам, что мы сейчас бегло напомним. Подробности можно найти, например, в монографии [Зиг1965].

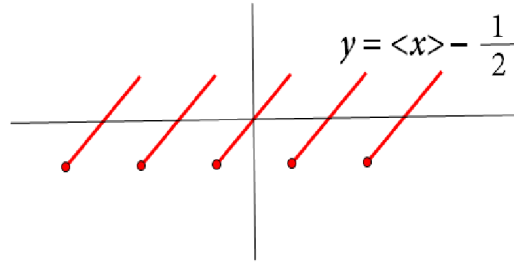
²Ряд сходится очень медленно: миллион слагаемых даёт всего три десятичных знака.

2.3.2. Напоминания о рядах Фурье. Мы рассматриваем *достаточно хорошие* (вскоре уточним это понятие) функции на *окружности* $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$; ограничимся вещественно-значными функциями. Мы поднимаем эти функции на *универсальную накрывающую*, то есть реализуем их как 2π -периодические функции, подбирая для них подходящее бесконечномерное пространство

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x + 2\pi) \equiv f(x)\}. \quad (2.3.2a)$$

Поскольку речь идёт о *приближениях*, на пространстве \mathcal{F} должна быть задана *норма* (или хотя бы топология).

Выбор не вполне очевиден. Мы обратились к рядам Фурье, поскольку собирались разложить в такие ряды разрывную функцию "пила":



Следовательно, традиционных пространств непрерывных функций – например, $\mathcal{F} = C^0(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}})$ с нормой "максимум модуля" (или что то же самое, топологией *равномерная сходимость*) для наших целей недостаточно.

Следующий естественный кандидат – гильбертово пространство $\mathcal{F} = \mathcal{L}^2(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}})$ квадратично-интегрируемых функций, снабжённое *евклидовым скалярным произведением*

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (2.3.2b)$$

– подходит. Поскольку все (*сепарабельные*) гильбертовы пространства изоморфны³, в дальнейшем будем обозначать это пространство просто \mathcal{L}^2 и, более того, выделим в нём подпространство нечётных функций $\mathcal{L}_{\text{odd}}^2$. В нашей интерпретации у него есть естественный счётный ортонормированный базис

$$\mathcal{L}_{\text{odd}}^2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots \rangle,$$

где для $n \in \mathbb{N}_{>1}$

$$\mathbf{e}_n(x) := 2 \sin(2\pi nx) \quad (2.3.2c)$$

(действительно, ортогональность легко проверяется, и с помощью тригонометрии легко проверить, что $\int_0^1 \sin^2(2\pi nx)dx = \int_0^1 \frac{1 - \cos(4\pi nx)}{2} dx = \frac{1}{2}$).

Интуиция конечномерных евклидовых пространств приводит к предположению о том, что любой вектор разлагается по ортонормированному базису:

³см. [КолФом1976]

$$v = \sum_n (v|e_n) e_n. \quad (2.3.2d)$$

Это предположение обычно оправдывается, см. [КолФом1976]. Следует, однако, внимательно следить за явлением, неожиданным с точки зрения конечных аналогий: бесконечная сумма непрерывных функций иногда оказывается разрывной! Согласно известным теоремам анализа, этого не могло бы произойти в случае *равномерной* сходимости частичных сумм; поэтому, скажем, массово переставлять слагаемые (чего мы, впрочем, делать не собираемся) надо с осторожностью.

Разрывы рассматриваемых нами сумм рядов Фурье сравнительно безопасны. Например, к ним применима теорема Меньшова (см. [Мен1942]): *всякую измеримую периодическую функцию можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы получить непрерывную функцию с рядом Фурье, равномерно сходящимся на всей числовой оси.*

Вопрос о разных видах сходимости к периодической функции её ряда Фурье занимает математиков более двухсот лет; во времена Фурье к этому вопросу примыкала проблема самого осознания понятия *функция*, см., например, [Osgood2019].

С рядами Фурье связанные многочисленные удивительные объекты; ограничимся упоминанием *почти всюду расходящегося ряда Фурье* интегрируемой функции, построенного 19-летним Колмогоровым в его первой публикации [Kolm1923].

2.3.3. Главное преобразование. Чтобы построить ряд Фурье интересующей нас разрывной функции, остаётся подставить $v = \langle x \rangle - \frac{1}{2}$ в (2.3.2d), то есть вычислить интегралы

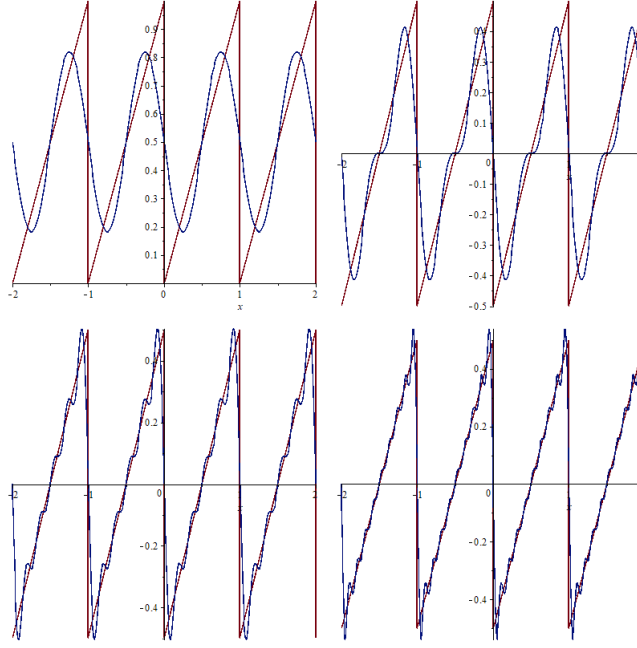
$$\begin{aligned} \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) e_n(x) dx &=_{(3.1.2b)} 2 \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) \sin(2\pi n x) dx = 2 \int_0^1 x \sin(2\pi n x) dx = \\ &= -\frac{2}{2\pi n} \int x d \cos(2\pi n x) \Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{\pi n} (x \cos(2\pi n x) \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \cos(2\pi n x) dx) = -\frac{1}{\pi n}. \end{aligned}$$

Нами обоснована формула

$$\boxed{\langle x \rangle - \frac{1}{2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n x)}{\pi n}} \quad (2.3.3a)$$

Вот её графические подтверждения при 1, 2, 5 и 9 *гармониках*⁴.

⁴Так называют количества слагаемых в приближениях.



Применим полученную формулу к выводу функционального уравнения.

Лемма. *Имеет место промежуточная формула*

$$\zeta(s) = \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+1}} dx \quad (2.3.3b)$$

Доказательство. Действительно, предоставив читателю обосновать законность изменения порядков суммирования и интегрирования, произведём преобразования

$$\begin{aligned} \zeta(s) & \stackrel{(3.1.1a)}{=} -s \int_0^{\infty} \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x^{s+1}} dx \stackrel{(3.1.2d)}{=} s \int_0^{\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}}{x^{s+1}} dx = \\ & = s \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n x^{s+1}} dx = \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+1}} dx \blacksquare \end{aligned}$$

Теорема. *Функции $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$ при $0 < s < 1$ связаны соотношением*

$$\zeta(s) = 2s(2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{s+1}} dx \quad (2.3.3c)$$

Доказательство. Воспользовавшись заменой переменной $y = 2\pi nx$, произведём преобразования

$$\begin{aligned} \zeta(s) & \stackrel{(3.1.2e)}{=} \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{x^{s+1}} dx = \\ & = \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{\left(\frac{y}{2\pi n}\right)^{s+1}} \frac{dy}{2\pi n} = \frac{s}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi n)^s}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y^{s+1}} dy = \end{aligned}$$

$$= s2^s \pi^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y^{s+1}} dy = 2s(2\pi)^{s-1} \zeta(1-s) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{s+1}} dx. \blacksquare$$

3.1.4. Оставшийся интеграл. Век назад он, видимо, был очевиден: например, в работе [Hardy1922], которую мы ещё упомянем, ответ приводится без какого-то ни было обоснования. Мы же введём обозначение

$$I(s) := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^{s+1}} dx$$

и немного поработаем с этим интегралом. Легко показать, что он сходится при $0 < s < 1$. Для разгона вычислим два значения.

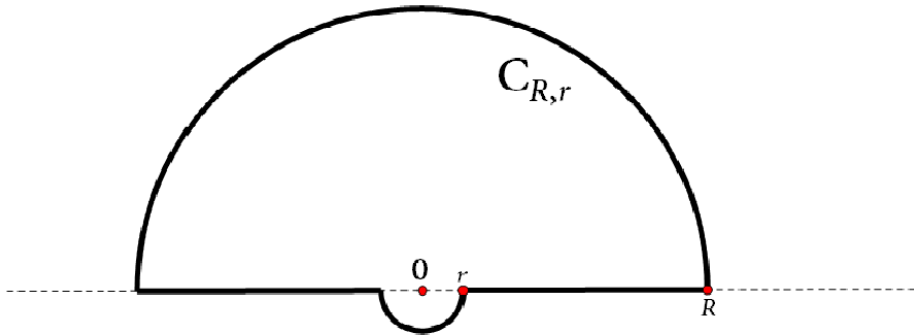
При $s = 0$ получаем интеграл⁵

$$I(0) := \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

с помощью которого всегда иллюстрируется применение теории функций комплексной переменной к несобственным вещественным интегралам. Напомним идею: \sin интерпретируется как мнимая часть $x \mapsto e^{ix}$; тогда в 0 возникает особенность, которую обходят в комплексной плоскости (см. чертёж) и затем применяют теорему о вычетах. Итак,

$$\begin{aligned} I(0) &= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{\operatorname{Im}(e^{ix})}{x} dx + \int_r^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{ix})}{x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0^+} \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right). \end{aligned}$$

Далее в комплексной плоскости вводится контур интегрирования



⁵В элементарных функциях он не берётся!

и с учётом того, что на большой дуге

$$|e^{ix}| = |e^{iRe^{i\varphi}}| = |e^{iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}| = e^{-R\sin\varphi} \longrightarrow_{R \rightarrow \infty} 0,$$

поскольку на большой дуге $0 < \varphi < \pi$ и, следовательно, $\sin\varphi > 0$, в контурном интеграле

$$\oint_{C_{R,r}} \frac{e^{ix}}{x} dx$$

а пределе при $R \rightarrow \infty$ интеграл по большой дуге исчезает – это называется *леммой Жордана*, и детали предлагается восстановить читателю. Итак,

$$I(0) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \lim_{r \rightarrow 0+} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{C_{R,r}} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

С учётом вклада интеграла по малой дуге, где $x = re^{it}$ при $\pi \leq t \leq 2\pi$, и по *теореме о вычетах*

$$I(0) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(2\pi i \cdot \operatorname{res}_{x=0} \frac{e^{ix}}{x} dx - \lim_{r \rightarrow 0+} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{ir(\cos t + i \sin t)}}{re^{it}} i r e^{it} dt \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(2\pi i - \pi i) = \frac{\pi}{2}.$$

Нами вычислен замечательный интеграл

$$I(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (2.3.3d)$$

Ещё одно хорошо (даже в наше время) известное значение интеграла – при

$$s = -\frac{1}{2} :$$

$$I\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

Заменой переменной $x = y^2$ он сводится к интегралу

$$I\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} \sin(y^2) dy$$

и оказывается (удвоенным) тоже узнаваемым предельным значением возникшего в оптике *интеграла Френеля*⁶. Он вычисляется аналогичными методами с помощью контурного интеграла по осмущке окружности большого радиуса с использованием *гауссова* интеграла – см. детали, например, в [ЛавШа61987].

Ответ:

$$I\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \quad (2.3.3e)$$

Перейдём, наконец, к общему случаю, в котором мы ограничимся предположениями

$$-1 < s < 0 \quad (2.3.3f)$$

(интересующие нас значения $I(s)$ при $0 < s < 1$ связаны с ним *аналитическим продолжением*).

⁶В [ЛавШа61987] указано, что интеграл был вычислен Эйлером в 1781 году

Откладывая разделение вещественной и мнимой частей, рассмотрим голоморфную 1-форму

$$\frac{e^{ix} dx}{x^{s+1}},$$

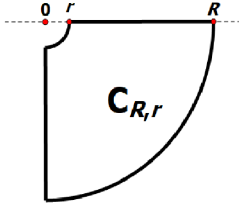
определённую в правой полуплоскости $\operatorname{Re}(x) > 0$. В этой плоскости, подразумевая равенство $x^{s+1} = e^{(s+1)\log x}$, выберем *ветвь* логарифма, определённую аналитическим продолжением ряда

$$\log x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} \dots$$

позволяющую пользоваться равенством

$$i^s = e^{\frac{\pi i s}{2}}. \quad (2.3.3g)$$

Рассмотрим интеграл нашей формы по контуру



Внутри него форма голоморфна, так что

$$\oint_{C_{R,r}} \frac{e^{ix} dx}{x^{s+1}} = 0. \quad (2.3.3h)$$

Лемма. При $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0+$ интегралы по обоим дугам контура $C_{R,r}$ стремятся к нулю.

Доказательство. На большой дуге (*лемма Жордана*, $|x| = R$) это следует из оценки

$$|e^{-(R \cos t + i \sin t)}| = e^{-R \cos t},$$

из которой при $\frac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ следует экспоненциальное убывание модуля интеграла при $R \rightarrow \infty$. На малой дуге, где $|x| = r$, действует элементарная оценка (в силу $e^{ix} \approx 1$), основанная на равенстве

$$\frac{d(re^{it})}{(re^{it})^{s+1}} = i \frac{dt}{r^s e^{its}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

(здесь использовано предположение (2.3.3f)). ■

Из леммы следует, что интегралы по прямолинейным участкам контура сокращаются. Будем рассматривать их как интегралы по отрезкам, соединяющим близкие к 0 точки с далёкими изломами контура; при этом интеграл по отрезку мнимой оси будем, как это принято, обозначать $\int_0^{-i\infty}$.

Тогда из доказанной леммы следует удивительная⁷ формула

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} dx}{x^{s+1}} = \int_0^{-i\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^{s+1}}. \quad (\star)$$

Теперь сведём наш основной интеграл к известному:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{ix} dx}{x^{s+1}} &= (\star) \int_0^{-i\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^{s+1}} =_{x=:iy} \int_0^{-i\infty} \frac{e^{-y}}{(iy)^{s+1}} d(iy) = \\ &= \int_0^{-i\infty} \frac{e^{-y}}{i^s y^{s+1}} dy =_{(3.1.4d)} e^{-\frac{\pi i s}{2}} \int_0^{-i\infty} \frac{e^{-y}}{y^{s+1}} dy = (\star) e^{-\frac{\pi i s}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y^{s+1}} dy = \\ &= -e^{-\frac{\pi i s}{2}} \Gamma(-s) \end{aligned} \quad (2.3.3i)$$

– гамма-функция Эйлера определена в Приложении Б, и там же указаны её основные свойства.

Мы подходим к завершению несколько затянувшейся работы с вещественными и комплексными интегралами.

Теорема. При любом $s \in (0, 1)$ имеет место равенство

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{s+1}} dx = -\left(\sin \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(-s)} \quad (2.3.3j)$$

Его альтернативный вид –

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{s+1}} dx = \frac{\pi}{2 \left(\cos \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1+s)}} \quad (2.3.3k)$$

Доказательство. Формула (2.3.3j) является мнимой частью формулы (2.3.3i). Формула (2.3.3k) получается из неё применением *формулы отражения* (см. Приложение Б). ■

Замечание. Для проверки частного случая $s = 0$ формула (2.3.3j) неприменима (точнее, требует предельного перехода), зато применима формула (2.3.3k). Для случая $s = -\frac{1}{2}$ годятся обе формулы.

2.3.5. Всё вместе. Мы подготовились к тому, чтобы связать значения $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$ (пока в критическом интервале $0 < s < 1$) с помощью известных функций. Соединяя полученные выше формулы (2.3.3c) и (2.3.3k), получаем (абсолютно не запоминаемую) формулу

⁷Она связывает между собой два неберущихся несобственных интеграла. Сходимость обоих очевидна, но по разным причинам: в одном подынтегральная функция осциллирует, а в другом быстро убывает. Таким образом, выход в комплексную область связывает между собой совсем разные явления вещественного анализа; в элементарно математике такого рода связи есть между круговыми и гиперболическими тригонометрическими функциями.

$$\zeta(s) = -2s(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s) \left(\sin \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(-s). \quad (2.3.5a)$$

К сожалению, нам снова придётся прибегнуть к кролику из шляпы: догадаемся умножить уравнение (2.3.5b) на $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = -2\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)s(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s) \left(\sin \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(-s), \quad (2.3.5c)$$

что после стандартных преобразований в правой части приводит к

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = -2^s\pi^{\frac{s}{2}-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)s\zeta(1-s) \left(\sin \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(-s). \quad (2.3.5d)$$

Здесь очевидная часть кончается; совершим ещё одно пустяковое преобразование (следите за множителем s и за знаком в правой части):

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = 2^s\pi^{\frac{s}{2}-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(1-s) \left(\sin \frac{\pi s}{2}\right) (-s)\Gamma(-s). \quad (2.3.5e)$$

Теперь воспользуемся сначала *функциональным уравнением*, придя к

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = 2^s\pi^{\frac{s}{2}-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(1-s) \left(\sin \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s), \quad (2.3.5f)$$

затем *формулой удвоения* $\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)} = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$ при $z = \frac{1-s}{2}$ с результатом

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = 2^s\pi^{\frac{s}{2}-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(1-s) \left(\sin \frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right),$$

или

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{s-3}{2}}\zeta(1-s) \left(\sin \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right). \quad (2.3.5g)$$

– следите за перестановкой Γ -множителей!

Наконец, воспользовавшись при $z = \frac{s}{2}$ известной из Приложения Б *формулой отражения* $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, получим

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{\frac{s-3}{2}}\zeta(1-s) \left(\sin \frac{\pi s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \frac{\pi}{\sin \frac{\pi s}{2}},$$

или

$$\boxed{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)} \quad (2.3.5h)$$

Желанная симметрия достигнута! При замене $s \leftrightarrow 1-s$ левая и правая части меняются местами.

Мы установили следующий важный результат:

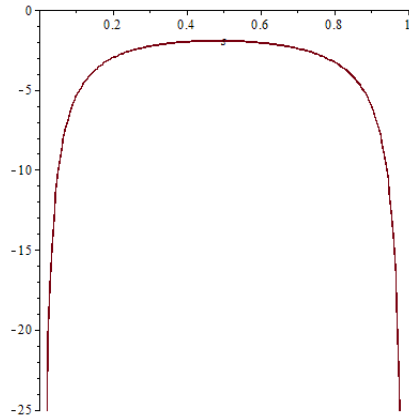
Теорема. Функция

$$\boxed{\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)} \quad (2.3.5i)$$

при $0 < s < 1$ удовлетворяет соотношению

$$\boxed{\xi(s) = \xi(1-s)} \blacksquare \quad (2.3.5j)$$

Симметричность графика функции ξ на критическом интервале



иллюстрирует теорему.

Следствие. *Функция $s \mapsto \zeta(s)$ допускает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с единственным полюсом в $s = 1$.*

Набросок доказательства. При $s \in \mathbb{C}$ сходимость всех рядов и интегралов, определённых с помощью величин вроде $n^s = n^{\operatorname{Re}(s)} e^{i \log n \operatorname{Im}(s)}$ зависит только от вещественной части числа s (мнимая добавляет только "фазу"). Поэтому можно считать (а проще всего сослаться на принцип *аналитического продолжения*), что $s \mapsto \zeta(s)$ уже определена в проколотой правой полуплоскости

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$$

и в *критической полосе* $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re}(s) < 1\}$ удовлетворяет функциональному уравнению (3.1.5g). С помощью этого уравнения функция продолжается на всю проколотую плоскость. ■

У нас появилась возможность обсуждать удивительные "величины" вроде⁸

$$1 + 2 + 3 + \dots = \zeta(-1).$$

Приложение А. $\zeta(2^k)$ при $k \rightarrow \infty$ и приближения π

В лекции 1 упоминалось, что достижения семейства Бернулли в вычислениях суммы обратных квадратов были весьма скромны – была вычислена пара знаков. Великие математики справедливо жаловались на медленную сходимость суммы. В настоящем Приложении будет показано, что ряд для дзета-функции при *больших* значениях аргумента сходится, наоборот, чрезвычайно быстро. Это обстоятельство вместе с уже упомянутыми результатами Эйлера позволит (средствами XVIII века!) построить весьма точные приближения числа π .

⁸из письма Рамануджана Харди, 1913: *...the sum...1+2+3+4+... = -\frac{1}{12}* under my theory. *If I tell you this you will at once point out to me the lunatic asylum...*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}
\text{ЛЧ(П2А.1b)} &=_{(\text{П2.1a})} \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}} = \\
&= \frac{1}{x} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^{2k}}{n^{2k}} = \frac{1}{x} - 2x \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{x^{2k}}{n^{2k}} = \\
&= \frac{1}{x} - 2 \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{n^{2k+2}} =_{k=k'-1} \frac{1}{x} - 2 \sum_{k'=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2k'-1}}{n^{2k'}} = \frac{1}{x} - 2 \sum_{k'=1}^{\infty} \zeta(2k') x^{2k'-1} = \\
&= \text{ПЧ(П2А.1b)} \blacksquare
\end{aligned}$$

Следствие. Для любого $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ имеет место равенство

$$\boxed{\zeta(2k) = \frac{2}{2k+1} \sum_{j=1}^{k-1} \zeta(2j) \zeta(2k-2j)} \quad (\text{П2А.1c})$$

Доказательство. Дифференциальное уравнение для котангенса. \blacksquare

П2А.2. Приближение π . Ограничимся одним примером. Пользуясь (П2А.1c), вычисляем (с помощью Maple) последовательно

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6}, \\
\zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90}, \\
\zeta(6) &= \frac{\pi^6}{945}, \\
\zeta(8) &= \frac{\pi^8}{9450}, \\
\zeta(10) &= \frac{\pi^{10}}{93555}, \\
\zeta(12) &= \frac{691}{638512875} \pi^{12}, \\
\zeta(14) &= \frac{2}{18243225} \pi^{14}, \\
\zeta(16) &= \frac{3617}{325641566250} \pi^{16}, \\
\zeta(18) &= \frac{43867}{38979295480125} \pi^{18}, \\
\zeta(20) &= \frac{174611}{1531329465290625} \pi^{20}, \\
\zeta(22) &= \frac{155366}{13447856940643125} \pi^{22}, \\
\zeta(24) &= \frac{236364091}{201919571963756521875} \pi^{24},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta(26) &= \frac{1315862}{11094481976030578125} \pi^{26}, \\ \zeta(28) &= \frac{6785560294}{564653660170076273671875} \pi^{28}, \\ \zeta(30) &= \frac{6892673020804}{5660878804669082674070015625} \pi^{30}, \\ \zeta(32) &= \frac{7709321041217}{62490220571022341207266406250} \pi^{32}.\end{aligned}$$

$$\pi^{32} \approx 8105800789910709.653155357989528221108583940555348380998$$

$$\pi^{16} \approx 90032220.84293327956713076822791653709446029644634162450$$

$$\pi^8 \approx 9488.531016070574007128575503906765796697179471641082693$$

$$\pi^4 \approx 97.40909103400243723644033268870511124972758567268542170$$

$$\pi^2 \approx 9.869604401089358618834490999876151135313699407240790627$$

$$\pi \approx 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105821$$

Таким образом, совершив ограниченное число рациональных операций и произведя 5 извлечений квадратных корней (различные способы разрабатывались с древности, а сверхбыстрый и как угодно точный результат даёт *метод Ньютона*), можно получить 30 знаков π . Это гораздо больше, чем я помню (и чем даёт мнемоника⁹ *How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics.*)

Приложение В. Гамма-функция Эйлера

П2Б.0. Определение. Гамма-функция изначально определяется в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > 0$ как несобственный интеграл

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx \quad (\text{П2Б.0a})$$

Может показаться, что в целях упрощения определения следовало бы заменить x^{z-1} под интегралом на x^z . Одним из аргументов в пользу общепринятой записи является её преобразование к виду

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^z e^{-x} \frac{dx}{x},$$

в котором гамма-функция предстаёт как *преобразование Меллина* функции $x \mapsto e^{-x}$: здесь $x \mapsto x^z$ – общий *характер* мультипликативной группы $\mathbb{R}_{>0}^\times$ положительных вещественных чисел, а $\frac{dx}{x}$ – инвариантная дифференциальная форма на ней.

Интегрированием по частям устанавливается *функциональное уравнение*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad (\text{П2Б.0b})$$

оно позволяет мероморфно продолжить Γ на всю комплексную плоскость без неположительных целых чисел $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$. Вместе с очевидной формулой

$$\Gamma(1) = 1 \quad (\text{П2Б.0c})$$

⁹Длины слов!

формула (ПЗ.0b) показывает, то Γ *экстраполирует сдвинутый факториал*: для $n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (\text{П2Б.0d})$$

П2Б.1. Нули и полюса. Их легко полностью определить.

Лемма. Γ не обращается в 0 на $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

Доказательство. Из формулы ((П2Б.0b)) видно, что, если бы для какого-то $a \in \mathbb{C}$ имело место равенство $\Gamma(a) = 0$, то также при любом $n \in \mathbb{N}$ выполнялось бы

$$\Gamma(a+n) = 0.$$

Это противоречило бы тому, что для $x, y \in \mathbb{R}$ при фиксированном y функция

$$x \mapsto \Gamma(x+iy) = \int_0^\infty u^{x-1} u^{iy} e^{-u} du$$

при больших x всё слабее зависит от y ; нам достаточно того, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty u^{x-1} u^{iy} e^{-u} du = \infty. \blacksquare$$

Среди полюсов тоже нет неочевидных.

Предложение. Множество полюсов Γ совпадает с множеством неположительных целых чисел; все они простые. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$\lim_{z \rightarrow -n} ((z+n)\Gamma(z)) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (\text{П2Б.1a})$$

Доказательство. Итерируя соотношение (П2Б.0b) (со сдвинутым аргументом), получим

$$\begin{aligned} \Gamma(z+2) &= (z+1)\Gamma(z+1), \\ \Gamma(z+3) &= (z+1)(z+2)\Gamma(z+1), \\ \Gamma(z+4) &= (z+1)(z+2)(z+3)\Gamma(z+1), \end{aligned}$$

и вообще

$$\Gamma(z+n+1) = (z+1)(z+2)\dots(z+n)\Gamma(z+1). \quad (\text{П2Б.1b})$$

Полагая в этом равенстве $z=0$, во-первых, как и в (ПЗ.0c), снова убеждаемся в том, что

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

а, во-вторых, воспользовавшись предыдущими равенствами, что

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)(z+n)},$$

затем умножим это равенство на $(z+n)$ и придём к формуле

$$(z+n)\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}. \quad (\text{П2Б.1})$$

В ней уже можно перейти к пределу при $z \rightarrow -n$, получив

$$\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{1}{(-n)(-n+1)(-n+2)\dots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Из этого же равенства следует, то все полюса Γ в неположительных целых числах – простые.

Других полюсов у неё нет, поскольку к любому $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ можно применить соотношение (П2Б.1) с достаточно большим n так, чтобы аргумент левой части попал в правую полуплоскость. ■

П2Б.2. Разложение в произведение. Из предыдущего подраздела мы знаем, что $\frac{1}{\Gamma}$ – целая функция с известными нам нулями. Из тех же соображений, которые упоминались в лекции 1 при разложении синуса в бесконечное произведение, можно утверждать, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv e^{Az+B} \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right) \quad (\text{П2Б.2a})$$

при некоторых константах $A, B \in \mathbb{C}$. Поделив формулу (П2Б.2a) на z и воспользовавшись ОДНОЙ ИЗ ПРЕДЫДУЩИХ ФОРМУЛ при $z = 0$, получим $1 = e^{A \cdot 0 + B}$, то есть $\boxed{B = 0}$.

Для вычисления A при $z \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ прологарифмируем (П2Б.2a). Получим

$$-\log \Gamma(z) = Az + \log z + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} \right). \quad (\text{П2Б.2b})$$

Положив в этом равенстве $z = 1$, с учётом

$$\sum_{n=1}^N \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{N+1}{N} \right) = \log(N+1),$$

обнаружим, что $\boxed{A = \gamma}$ – константа Эйлера-Маскерони.

Мы получили *произведение Вейерштрасса*

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma(z)} \equiv e^{\gamma z} \cdot z \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right)} \quad (\text{П2Б.2c})$$

П2Б.3. Формула отражения. Это – важный результат, позволяющий, помимо прочего, вычислять факториалы *полуцелых* чисел.

Теорема. *Имеет место "формула отражения", то есть равенство целоморфных функций*

$$\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}} \quad (\text{П2Б.2a})$$

Доказательство. Перевернув эту формулу получим желательное равенство целых функций

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} \stackrel{?}{=} \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

Применив к левой части функциональное уравнение в виде

$$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z),$$

придём к желательной формуле

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} \stackrel{?}{=} -z \frac{\sin(\pi z)}{\pi}.$$

Из этой формулы легко получаем требуемое. ■

Следствие.

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}} \quad (\text{П2Б.3x})$$

Достаточно подставить в формулу отражения $z = \frac{1}{2}$.

П2Б.4. Формула удвоения. Для наших целей достаточно этого частного случая *формулы умножения Гаусса*. Её ещё называют *формулы удвоения Лежандра*.

Теорема. *Имеет место равенство целомероморфных функций*

$$\boxed{\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)} = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \quad (\text{П2В4a})$$

Доказательство. Очевидно, у обеих частей равенства нет нулей, а множества полюсов совпадают: это – отрицательные полуцелые числа. Отсюда без всяких вычислений следует, что имеет место равенство

$$\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)} = \mathcal{U}(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{П2В4b})$$

где \mathcal{U} – некоторая целая функция без нулей (экспонента целой функции); остаётся её определить.

Воспользовавшись функциональным уравнением, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{U}(z+1)}{\mathcal{U}(z)} & \stackrel{(\text{П3.4b})}{=} \frac{\frac{\Gamma(2z+2)}{\Gamma(z+1)\Gamma(z+\frac{3}{2})}}{\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}} = \frac{\Gamma(2z+2)\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})}{\Gamma(2z)\Gamma(z+1)\Gamma(z+\frac{3}{2})} = \\ & = \frac{2z(2z+1)}{z(z+\frac{1}{2})} = 4, \end{aligned}$$

откуда из соображений о росте целых функций получаем $\mathcal{U}(z) = C \cdot 4^z$, то есть

$$\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)} = C \cdot 2^{2z} \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{ПБ2.4c})$$

где $C \in \mathbb{C}$ – константа.

Подставляя в (П3.4c) значение $z = 1$, получаем

$$\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)} = C \cdot 4 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \dots 2C\sqrt{\pi}, \text{ откуда } C = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \blacksquare$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Hardy1922] G. H. Hardy, *A new proof of the functional equation for the Zeta-function*. *Mathematica Scandinavica, Matematisk Tidsskrift*. B(1922), pp. 71-73.
- [Kahn2018] Bruno Kahn, *Fonctions zêta et L de variétés et de motifs*. Calgace & Mounet, 2018.
- [Kolm1923] A. Kolmogoroff, *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*. *Fund. Math.*, 1923, 4, p. 324–328.
- [Osgood2019] Brad G. Osgood, *Lectures on the Fourier Transform and Its Applications*. American Mathematical Soc., 2019.
- [Venk2015] Akshay Venkatesh, *The analytic class number formula and L- functions*. Lecture notes, 2015 (доступны в сети).
- [БорШаф1985] З.И. Борович, И.Р. Шафаревич, *Теория чисел*. М.: Наука, 1985.
- [Зиг1965] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*. М.: "Мир", 1965.
- [Мен1942] Д. Е. Меньшов, *Sur la convergence uniforme des séries de Fourier*. Математический сборник. — 1942. — Т. 11(53), вып. 1-2. — С. 67 — 96.
- [КолФом1976] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: "Наука", 1976.
- [КосФав2004] Костомаров Д. П., Фаворский А. П. , *Вводные лекции по численным методам*. М.: Логос, 2004.
- [ЛавШаб1987] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: "Наука", 1987.
- [Мачис2013] Ю. Ю. Мачис, *О константе Эйлера–Маскерони*. Матем. заметки, 2013, том 94, выпуск 5, 695–701.
- [Титчмарш2010] Э.Ч. Титчмарш, *Дзета-функция Римана*. УРСС, 2010.