Разбиения

Е. Ю. Смирнов

Аннотация. Записки курса, прочитанного на Летней школе «Современная математика» 21–25 июля 2023 г.

1. Первое занятие, 21 июля 2023 г.

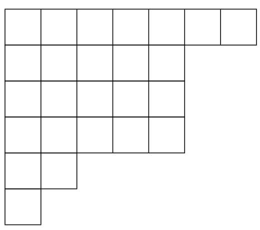
1.1. **Разбиения и диаграммы Юнга.** Разбиением натурального числа будем называть его представление в виде суммы натуральных слагаемых. При этом порядок слагаемых неважен: так, например, $2+3$ и $3+2$ — это одно и то же разбиение числа 5. Поэтому эти слагаемые можно считать нестрого убывающими. Вот формальное определение:

Определение 1.1. *Разбиением* натурального числа n называется набор натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, для которого $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$ и $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$.

Иногда удобно считать, что разбиение — это невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots)$, в которой все λ_i начиная с некоторого номера равны нулю. Другими словами, к конечному набору λ_i дописывается бесконечный «хвост» нулей.

Разбиение можно представлять графически при помощи *диаграмм Юнга*. Диаграммой Юнга разбиения $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ называется подмножество четвертого квадранта плоскости, состоящее из единичных квадратиков. Квадратики размещаются в последовательных строках, выровненных по левому краю, причем количество квадратиков в i-той строке равно λ_i (таким образом, длина каждой следующей строки не превышает длины предыдущей).

Пример 1.2.



На рисунке изображена диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $(7, 5, 5, 5, 2, 1)$ числа 25.

Отразим диаграмму Юнга λ относительно диагонали (т.е. прямой $x + y = 0$). Мы получим новую диаграмму Юнга, которую условимся обозначать через $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ и называть *сопряженной* к λ (иногда её ещё называют *транспонированной*). Ясно, что λ'_i равняется числу компонент исходного разбиения λ, больших или равных i.

Date: 25 июля 2023 г.

Пример 1.3.

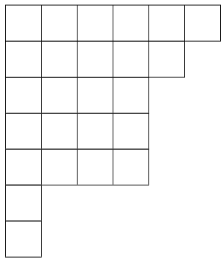


Диаграмма $(6, 5, 4, 4, 4, 1, 1)$ является сопряженной к диаграмме из предыдущего примера.

Будем обозначать число разбиений числа n через $p(n)$. Также условимся считать, что $p(0) = 1$.

Нетрудно найти $p(n)$ для маленьких значений n (скажем, при $n \leq 5$). Они приведены в следующей таблице:

n	0	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	1	1	2	3	5	7	11

Упражнение 1.4. Проверьте это и для каждого $n \leq 5$ нарисуйте все диаграммы Юнга, соответствующие разбиениям числа n.

Возникает естественный вопрос: существует ли какая-нибудь формула, с помощью которой можно найти $p(n)$ для данного n? Оказывается, что простой замкнутой формулы для числа разбиений (как, например, для биномиальных коэффициентов) найти не удается. Однако кое-что про эту последовательность сказать все же получается: а именно, можно выписать ее *производящую функцию*. Этим мы сейчас и займемся.

1.2. **Напоминание о производящих функциях.** В начале этого раздела мы вкратце напомним некоторые сведения о производящих функциях и формальных степенных рядах и разберем несколько простых примеров их использования. Более подробный рассказ об этом читатель может найти во многих учебниках по комбинаторике.

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — произвольная числовая последовательность. Рассмотрим *формальный степенной ряд* от переменной q:

$$a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n + \ldots . \qquad (*)$$

Он называется *производящей функцией* для исходной последовательности.

Замечание 1.5. Мы будем работать с производящими функциями именно как с *формальными* степенными рядами — выражениями вида $(*)$, которые можно представлять себе как «многочлены бесконечной степени». Такие выражения можно, например, складывать и перемножать друг с другом. Отметим, что эти операции определены корректно: разумеется, для того, чтобы сложить или перемножить два ряда, нужно произвести бесконечное число операций, однако же число операций, необходимых для нахождения каждого коэффициента в сумме или произведении, конечно. При этом нас не будут интересовать вопросы сходимости этих рядов при тех или иных числовых значениях q.

Упражнение 1.6. Пусть $A(q) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots$ — формальный степенной ряд, причем $a_0 \neq 0$. Докажите, что существует ряд $B(q)$, обратный к $A(q)$ — т.е. такой ряд, что $A(q) \cdot B(q) = 1$. Что происходит при $a_0 = 0$?

Иногда производящую функцию, выраженную формальным степенным рядом, получается записать в каком-либо ином виде (скажем, как рациональную функцию от q), что зачастую позволяет получить какие-то новые сведения о последовательности $(a_0, \dots, a_n, \dots)$.

1.3. **Разбиения на различные слагаемые.** Пусть $p_D(n)$ — число разбиений n на попарно различные слагаемые (от слова "distinct"). Так, например, $p_D(8) = 6$: соответствующие разбиения — это (8), $(7, 1)$, $(6, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 2, 1)$ и $(4, 3, 1)$.

Предложение 1.7. *Производящая функция $P_D(q) = \sum_{n\geq 0} p_D(n)q^n$ представляется в виде бесконечного произведения*

$$P_D(q) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k).$$

Доказательство. Раскроем скобки в предыдущем выражении и не будем приводить подобные члены. Каждое слагаемое тогда будет иметь вид $q^{k_1}q^{k_2}\dots q^{k_r}$, где $k_1 < k_2 < \dots < k_r$: это означает, что из скобок с номерами k_i мы взяли q^{k_i}, а из остальных скобок — единицу. Тем самым оно будет отвечать разбиению $(k_r, \dots, k_1)$ числа $n = k_1 + \dots + k_r$, все части которого будут различны. □

Замечание 1.8. Знак бесконечного произведения может напугать читателя, который ранее не имел дела с этим объектом. Однако бояться его следует не больше, чем бесконечных рядов. Действительно, на первый взгляд кажется, что для того, чтобы представить бесконечное произведение как ряд, нужно «перемножить бесконечное число скобок». Однако чтобы вычислить очередной (скажем, k-й) член этого ряда, нужно взять только *конечное* число (в данном случае k) первых сомножителей — остальные не окажут на коэффициент при q^k никакого влияния.

Аналогично доказывается и знаменитая *формула Эйлера* для производящей функции числа разбиений.

Теорема 1.9 (Л. Эйлер)**.** *Производящая функция $P(q)$ для количества разбиений числа n задается следующим бесконечным произведением:*

$$P(q) = \sum p(n)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{-1}.$$

Доказательство. Выражение для $P(q)$ можно переписать в виде

$$P(q) = (1+q+q^2+\dots)(1+q^2+q^4+\dots)(1+q^3+q^6+\dots)\dots$$

Аналогично предыдущему, если раскрыть скобки в правой части и не приводить подобные, каждое слагаемое будет иметь вид $q^{k_1m_1}q^{k_2m_2}\dots q^{k_rm_r}$, где $k_1 < k_2 < \dots < k_r$, а m_i — произвольные целые положительные числа. Оно будет получаться в результате взятия из скобки с номером k_i слагаемого k_im_i. Такое слагаемое отвечает разбиению, в которое каждое из чисел k_i входит m_i раз. □

1.4. **Разбиения на нечетные и различные слагаемые.** Вот еще одна задача, которую можно решить при помощи производящих функций. Рассмотрим следующую задачу: сколькими способами можно разложить число в сумму *нечетных* слагаемых? Обозначим число таких способов через $p_O(n)$ (от слова "odd" — «нечетный»).

Например, $p_O(8) = 6$, т.к. для числа 8 есть 6 таких разбиений:

$$7+1 = 5+3 = 5+1+1+1 = 3+3+1+1 = 3+1+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1+1.$$

Мы видели, что число разбиений числа 8 на различные слагаемые будет тем же. Оказывается, это верно для любого n.

Предложение 1.10. *$p_D(n) = p_O(n)$ при любом n.*

Доказательство. Докажем, что равны производящие функции $P_O(q) = \sum p_O(n)q^n$ и $P_D(q) = \sum p_D(n)q^n$.

Рассуждая точно так же, как и с произвольными разбиениями, получаем, что производящая функция $P_O(q) = \sum p_O(n)q^n$ равняется

$$P_O(q) = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdot \frac{1}{1-q^5} \cdot \ldots .$$

Как мы убедились только что,

$$P_D(q) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots$$

Дальнейшее сводится к чисто алгебраическим преобразованиям. Умножим и поделим ряд $P_O(q)$ на бесконечное произведение $(1-q^2)(1-q^4)\ldots$:

$$P_O(q) = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdot \frac{1}{1-q^5} \cdots = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{1-q^2} \frac{1}{1-q^3} \cdot \frac{1-q^4}{1-q^4} \cdots =$$
$$= \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots} = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = P_D(q).$$

□

Можно задать другой вопрос: пусть мы уже знаем, что разбиений на нечетные слагаемые столько же, сколько на различные. Можно ли построить какое-нибудь «естественное» взаимно-однозначное отображение (биекцию) между наборами таких разбиений? Иначе говоря, как сопоставить взаимно-однозначным образом каждому разбиению числа n на нечетные слагаемые его же разбиение на различные слагаемые?

Можно построить несколько таких биекций. Опишем одну из них на примере.

Пусть дано какое-то разбиение числа на нечетные слагаемые, например, такое:

$$23 = 7 + 5 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1$$

Рассмотрим «центрированную диаграмму Юнга» — нарисуем симметричную относительно вертикальной оси диаграмму (см. рис. слева), в первой строке которой будут 7 точек, во второй и третьей — по 5, и так далее.

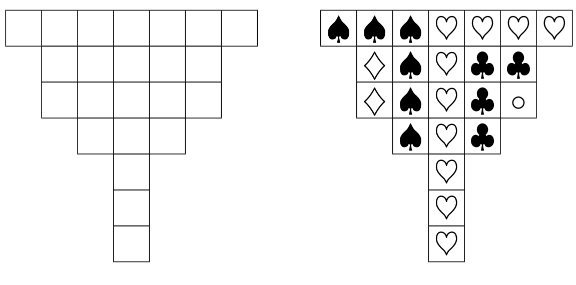


Рис. 1.1. Разбиение диаграммы Юнга на крюки

Теперь разобьем эту диаграмму на крюки, как показано на рисунке 1.1 справа. Мы получим разбиение числа 23 на *различные* слагаемые:

$$23 = 10 + 6 + 4 + 2 + 1.$$

Упражнение 1.11. Убедитесь, что это соответствие действительно является биекцией (она называется *биекцией Сильвестра*).

1.5. **Пятиугольные числа.** Рассмотрим бесконечное произведение, обратное к $P(q)$. Это произведение бесконечного числа двучленов:

$$P(q)^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k).$$

Упражнение 1.12. Вычислите первые 8 членов (до q^7 включительно) этого бесконечного произведения.

Эйлер вычислил первые несколько десятков членов этого произведения, и у него получилось следующее:

$$P(q)^{-1} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + \ldots$$

Здесь можно сделать сразу несколько интересных наблюдений. Во-первых, видно, что все коэффициенты этого ряда равны либо 0, либо ± 1, причем по мере увеличения степени ненулевые члены встречаются все реже и реже. Во-вторых, все члены, кроме свободного, идут парами: два отрицательных, два положительных, потом снова два отрицательных и так далее. Разность между степенями в паре равняется номеру пары: сначала это единица (q и q^2), потом два (q^5 и q^7), потом три (q^{12} и q^{15}), и так далее.

Наконец, последовательность степеней 1, 5, 12, 22, 35... тоже была хорошо известна Эйлеру — это так называемые *пятиугольные числа*, которые равняются числу точек в пятиугольнике, сторона которого равна 1, 2, 3... точкам соответственно (см. рис. 1.2).

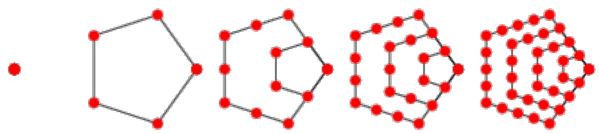


Рис. 1.2. Пятиугольные числа

Нетрудно видеть, что m-тое пятиугольное число равняется $m(3m-1)/2$.

Оказывается, что имеет место следующий результат. Его доказательство будет получено в следующей лекции.

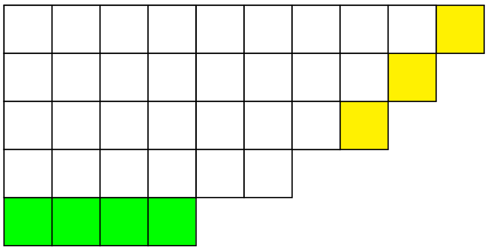
Теорема 1.13 (пентагональная теорема Эйлера)**.** *Ряд, обратный к ряду* $P(q) = \sum p(n)q^n$, *имеет вид*

$$P(q)^{-1} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + q^{\frac{m(3m+1)}{2}}\right).$$

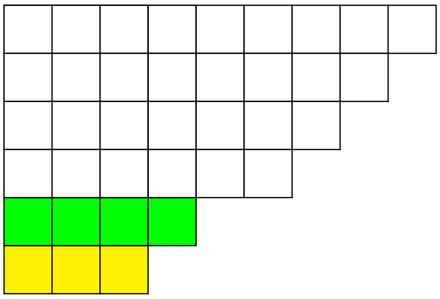
Мы докажем эту теорему двумя способами. Первый будет комбинаторным; он принадлежит ученику Сильвестра Франклину.

Доказательство. Выражение $(1-q)(1-q^2)\ldots$ можно рассматривать как производящую функцию для разбиений на различные слагаемые, в которой каждое разбиение считается с весом 1 для разбиений на четное число частей и -1 для разбиений на нечетное число частей. Тогда утверждение теоремы состоит в том, что тех и тех разбиений «почти поровну»: их количество отличается на единицу, если вес разбиения имеет вид $\frac{n(3n\pm1)}{2}$, и равно в противном случае.

Попытаемся построить биекцию между такими разбиениями на четное и нечетное число частей. Рассмотрим диаграмму Юнга со строками различной длины и введем три ее характеристики: ℓ — число строк, b — длина нижней строки (отмечена зеленым), и d — длина «диагонали», т.е. наибольшей последовательности клеток, которые можно получить из самой правой клетки первой строки ходом слона (отметим эти клетки желтым).



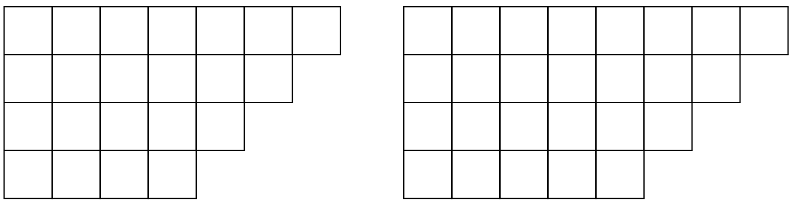
Теперь, если $d < b$, удалим клетки диагонали и дорисуем их в виде новой нижней строки, как показано на следующей диаграмме:



Посмотрим на параметры ℓ', b' и d' этой диаграммы. Для нее $\ell' = \ell + 1$, $b' = d$, а $d' \geq d$. Таким образом, мы построили отображение, которое не меняет число клеток в диаграмме и меняет четность числа ее строк, при условии, что $b > d$. Обратите внимание, что для полученной диаграммы $b' \leq d'$.

Аналогично можно построить отображение, отправляющее диаграмму, у которой $b \leq d$, в диаграмму, у которой $b' > d'$: действительно, достаточно отрезать нижнюю строку и приставить ее в виде диагонали. Таким образом, полученное отображение будет инволюцией.

Оно будет определено на «почти всех» диаграммах. Те диаграммы, на которых оно определено не будет, соответствуют случаям, когда $\ell = d = b$ и $\ell = d = b - 1$ (при $\ell = 4$ они изображены на рисунке ниже).



Ясно, что эти диаграммы будут состоять из $\ell^2 + \frac{\ell(\ell-1)}{2} = \frac{\ell(3\ell-1)}{2}$ и $\ell^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{2} = \frac{\ell(3\ell+1)}{2}$ клеток соответственно и входить с весом, равным $(-1)^\ell$. Это доказывает пентагональную теорему Эйлера. □

Второй способ мы разберем на следующем занятии. Для него нам потребуется тождество Якоби для тройного произведения.

2. Второе занятие, 22 июля 2023 г.

2.1. **Подсчет числа разбиений с помощью пентагональной теоремы.** В качестве следствия пентагональной теоремы Эйлера покажем, как с ее помощью можно выписать рекуррентное соотношение для числа разбиений.

Перемножив ряды $P(q)$ и $P(q)^{-1}$, мы получим единицу. Поэтому

$$\left(\sum p(k)q^k\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(q^{\frac{m(3m-1)}{2}}+q^{\frac{m(3m+1)}{2}}\right)\right)=1.$$

С одной стороны, коэффициент при q^n для $n>0$ в произведении $P(q)P(q)^{-1}$ равен нулю.

С другой стороны, если $\sum a_n q^n$ и $\sum b_m q^m$ — два степенных ряда. то коэффициент при q^k в их произведении равняется $a_k b_0 + a_{k-1}b_1 + \cdots + a_0 b_k = \sum a_{k-i}b_i$. Выпишем, чему равен коэффициент при q^n в левой части, и тем самым найдем соотношение на числа разбиений $p(n)$:

$$p(n)+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(p(n-m(3m-1)/2)+p(n-m(3m+1)/2)\right)=0$$

(здесь мы считаем, что $p(k)=0$ при $k<0$). Перенесем все, кроме первого слагаемого, в правую часть, и получим, что

$$p(n)=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(p(n-m(3m-1)/2)+p(n-m(3m+1)/2)\right).$$

Это рекуррентное соотношение, глубина которого постоянно увеличивается. Выпишем его при $6\le n\le 12$ и с его помощью найдем соответствующие $p(n)$.

$$\begin{aligned}
p(6) &= p(5)+p(4)-p(1)=7+5-1=11;\\
p(7) &= p(6)+p(5)-p(2)-p(0)=11+7-2-1=15;\\
p(8) &= p(7)+p(6)-p(3)-p(1)=15+11-3-1=22;\\
p(9) &= p(8)+p(7)-p(4)-p(2)=22+15-5-2=30;\\
p(10) &= p(9)+p(8)-p(5)-p(3)=30+22-7-3=42;\\
p(11) &= p(10)+p(9)-p(6)-p(4)=42+30-11-5=56;\\
p(12) &= p(11)+p(10)-p(7)-p(5)+p(0)=56+42-15-7+1=77.
\end{aligned}$$

2.2. **Тождество Якоби для тройного произведения.**

Теорема 2.1 (Тождество Якоби для тройного произведения)**.**

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1})(1-q^k)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}q^{\frac{j(j+1)}{2}}x^j.$$

Доказательство. Рассмотрим бесконечное произведение

$$f(x)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1}).$$

Его можно рассматривать как *ряд Лорана* по x:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(q)x^n,$$

коэффициенты которого $a_n(q)$ суть формальные степенные ряды от q.

Легко видеть, что $f(xq) = x^{-1}q^{-1}f(x)$ (это рутинная проверка).

Отсюда следует, что $a_n(q)q^{n+1} = a_{n+1}(q)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Тем самым все члены $a_n(q)$ можно выразить, зная $a_0(q)$: действительно,

$$a_1(q) = qa_0(q); \quad a_2(q) = q^2 a_1(q) = q^3 a_0(q), \ldots, \quad a_n(q) = q^n a_{n-1}(q) = \cdots = q^{1+2+\cdots+n} a_0(q)$$

для положительных n; для отрицательных n то же равенство проверяется аналогично. Итак, имеем равенство

$$f(x) = a_0(q) \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)/2} x^n.$$

Осталось вычислить $a_0(q)$. Этот коэффициент равен свободному члену в выражении

$$(1+xq)(1+xq^2)(1+xq^3)\ldots(1+x^{-1})(1+x^{-1}q)(1+x^{-1}q^2)\ldots.$$

Пусть $a_0(q)$ равен

$$a_0(q) = \sum_{n \geq 0} b_n q^n.$$

Аналогично рассуждениям с прошлого занятия получаем, что коэффициент b_n этого ряда есть число способов представить число n в виде суммы нескольких различных элементов множества $\{1, 2, 3, \ldots\}$ и такого же числа различных элементов множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Осталось заметить, что b_n есть не что иное, как число разбиений $p(n)$. Действительно, такому представлению числа n можно сопоставить диаграмму Юнга, «руки» которой (фрагменты строк от диагонали до правого края диаграммы, включая диагональ) суть элементы множества $\{1, 2, 3, \ldots\}$, а «ноги» (т.е. фрагменты столбцов от диагонали до нижнего края, исключая клетку на диагонали) — это элементы из $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Поэтому

$$a_0(q) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^{-1} = P(q),$$

и следовательно,

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1}) = \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Поделив обе части равенства на $P(q)$, получаем тождество Якоби для тройного произведения.

$\square$

2.3. **Второе доказательство пентагональной теоремы.** В этом разделе мы выведем пентагональную теорему Эйлера из тождества Якоби для тройного произведения. Для этого сделаем замену переменной в тождестве Якоби: подставим q^3 вместо q.

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1+xq^{3k})(1+x^{-1}q^{3k-3})(1-q^{3k}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{3j^2+3j}{2}} x^j.$$

Теперь положим $x = -q^{-1}$. Получим, что

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^{3k-1})(1-q^{3k-2})(1-q^{3k}) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j q^{\frac{3j^2+j}{2}}.$$

А это и есть пентагональная теорема Эйлера:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \left(q^{\frac{j(3j-1)}{2}} + q^{\frac{j(3j+1)}{2}}\right).$$

2.4. **Тождество Якоби.** Следующее равенство — это еще одно следствие тождества для тройного произведения. Оно также принадлежит Якоби.

Теорема 2.2. *Имеет место равенство*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Доказательство. Есть искушение подставить в тождество Якоби $x = -1$. В левой части получится что-то очень похожее на произведение $\prod(1-q^k)$, однако не совсем: там будет еще сомножитель $(1-q^0)$, что равно нулю.

Поэтому будем действовать немного иначе. Поделим обе части тождества Якоби на $1+x^{-1}$. Левая часть окажется равной

$$\frac{1}{1+x^{-1}}\prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1})(1-q^k) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+xq^k)(1+x^{-1}q^k)(1-q^k).$$

Правая же часть будет равна

$$\frac{1}{1+x^{-1}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}}x^n = \frac{1}{1+x^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}}(x^n+x^{-n-1}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{x^n+x^{-n-1}}{1+x^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}}(x^n - x^{n-1} + \dots + x^{-n}).$$

Теперь уже можно подставить $x = -1$. Поскольку последняя сумма равна $(-1)^n(2n+1)$, получаем требуемое равенство. $\square$

3. Третье занятие, 24 июля 2023 г.

3.1. **Сравнение Рамануджана по модулю 5.** С помощью теорем Эйлера и Якоби покажем, что $p(5k+4) \equiv 0 \mod 5$ при любом k. Впервые это, по-видимому, заметил Рамануджан.

Теорема 3.1. *При любом k имеет место сравнение $p(5k+4) \equiv 0 \mod 5$.*

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$E(q) = \prod_{k\geq 1}(1-q^k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

и

$$J(q) = \prod_{k\geq 1}(1-q^k)^3 = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(2n+1)q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Заметим, что $\frac{n(3n\pm1)}{2}$ дает по модулю 5 остатки 0, 1 или 2. Поэтому

$$E(q) = E_0(q) + E_1(q) + E_2(q),$$

где $E_k(q)$ — это сумма всевозможных мономов $a_n q^n$, входящих в $E(q)$, для которых $n \equiv k \mod 5$.

Аналогично $\frac{n(n+1)}{2}$ дает по модулю 5 остатки 0, 1 и 2, и поэтому $J(q) = J_0 + J_1 + J_2$. Но когда $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 2 \mod 5$, имеет место сравнение $2n+1 \equiv 0 \mod 5$. Поэтому если привести коэффициенты $J(q)$ по модулю 5, слагаемое J_2 обратится в нуль.

Итак, запишем $P(q)$ следующим образом:

$$P(q) = \frac{1}{E(q)} = \frac{E(q)J(q)}{E^5(q)}.$$

Однако по «ленивому биному Ньютона» $(1-q)^5 = 1-q^5$ и аналогично $(1-q^k)^5 = 1-q^{5k}$. Поэтому $E^5(q) = E(q^5)$. Значит,

$$P(q) = \frac{(E_0+E_1+E_2)(J_0+J_1)}{E(q^5)} = \frac{E_0J_0 + E_0J_1 + E_1J_0 + E_1J_1 + E_2J_0 + E_2J_1}{E(q^5)}.$$

Поэтому коэффициенты при степенях q, сравнимых с 4 по модулю 5, равны нулю. □

Можно действовать иначе: начать с того, что $P(q) = E^9(q)/E^{10}(q) = J^3(q)/E^2(q^5)$, и заметить, что $J^3 = J_0^3 + 3J_0^2J_2 + 3J_0J_1^2 + J_1^3$ также содержит только члены, степень которых сравнима с 0, 1, 2 и 3 по модулю 5.

Задача 3.1. Докажите второе сравнение Рамануджана: $p(7k+5) \equiv 0 \mod 7$.

Задача 3.2 (*)**.** Докажите третье сравнение Рамануджана: $p(11k+6) \equiv 0 \mod 11$.

Вторая задача требует существенно больше вычислений, но в целом обе они решаются теми же методами, что и для 5.

3.2. **Асимптотическое поведение $p(n)$.** Асимптотическое поведение функции $p(n)$ описывается следующей теоремой, доказанной в 1918 г. Г. Харди и С. Рамануджаном и независимо в 1920 г. российско-американским математиком Я. В. Успенским:

Теорема 3.2. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$p(n) \sim \frac{1}{4\pi\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}} \qquad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Это сложный результат, требующий тонкого применения методов комплексного анализа. Его «элементарное» (т.е. не требующее комплексно-аналитических методов) доказательство было предложено в 1942 г. П. Эрдёшем; оно также достаточно непросто. Прочесть его можно, например, в книге Melvin B. Nathanson, *Elementary methods in number theory* (Springer, 2000).

Мы докажем значительно более слабую версию этой теоремы. Наше доказательство следует обзору Игоря Пака: Igor Pak. *Partition bijections: a survey* (раздел 9.6).

Теорема 3.3. *Существуют такие числа* $0 < a < c$, *для которых*

$$e^{a\sqrt{n}} < p(n) < e^{c\sqrt{n}}.$$

Более того, можно взять $c = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Доказательство. Нижнюю оценку доказать несложно: работает грубая оценка при помощи биномиального коэффициента. Итак, пусть $p_k(n)$ — число разбиений на не более чем k частей. Имеет место неравенство

$$k!p_k(n) > \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Действительно, правая часть — это число разбиений n на k *упорядоченных* слагаемых, которым разрешается быть нулевыми (в кружковской практике эта формула известна как «шары и перегородки»). Левая — это всевозможные упорядочения k частей разбиения числа n.

Заменим бином на старший член соответствующего многочлена от n, а $p_k(n)$ на $p(n)$:

$$k!p(n) > \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Возьмем $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Покажем, что $p(n) > n^{k-1}/(k!)^2$. Для этого воспользуемся формулой Стирлинга:

$$k! \simeq \sqrt{2\pi k}\frac{k^k}{e^k}.$$

Получаем, что неравенство, которое нам требуется доказать — это

$$p(n) > \frac{k^{2k-2}e^2k}{2\pi k^{2k+1}} = \frac{e^{2\sqrt{n}}}{n^{3/2}},$$

откуда и вытекает требуемая оценка снизу.

Для доказательства верхней оценки начнем со следующих равенств:

$$np(n) = \sum_{r=1}^{n} r \sum_{\lambda\vdash n} m_r(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} r \sum_{m=1}^{\lfloor n/r\rfloor} p(n-mr).$$

Здесь через $m_r(\lambda)$ обозначается число строк длины r, входящих в разбиение λ.

Первое равенство доказывается при помощи подсчета двумя способами общего числа клеточек во всех диаграммах, отвечающих разбиениям числа n. Этих клеточек $np(n)$; с другой стороны, можно просуммировать длины строк данной длины по всем диаграммам и взять сумму по длинам строк. Второе равенство доказывается так:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\vdash n} m_r(\lambda) = &\left|\{\lambda\vdash n : m_r(\lambda)=1\}\right| + 2\left|\{\lambda\vdash n : m_r(\lambda)=2\}\right| \\ &+ 3\left|\{\lambda\vdash n : m_r(\lambda)=3\}\right| + \ldots \\ = &\left|\{\lambda\vdash n : m_r(\lambda)\geq 1\}\right| + \left|\{\lambda\vdash n : m_r(\lambda)\geq 2\}\right| \\ &+ \left|\{\lambda\vdash n : m_r(\lambda)\geq 3\}\right| + \ldots \\ = &p(n-r)+p(n-2r)+p(n-3r)\ldots\end{aligned}$$

Получив это рекуррентное соотношение, воспользуемся индукцией по n. Предположим, что $p(k) < e^{c\sqrt{k}}$ при всех $k < n$, где $c = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$. Используем это соотношение для доказательства индуктивного перехода:

$$np(n) < \sum_{r=1}^{n}\sum_{m=1}^{\lfloor n/r\rfloor} re^{c\sqrt{n-mr}} < e^{c\sqrt{n}}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} re^{(-cm/2\sqrt{n})r}$$

Здесь мы воспользовались оценкой для квадратного корня:

$$c\sqrt{n-mr} = c\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{mr}{n}} < c\sqrt{n}\left(1-\frac{mr}{2n}\right) = c\sqrt{n}-\frac{cmr}{2\sqrt{n}}.$$

Заметим, что $\sum_1^\infty rt^r = t/(1-t)^2$ и $e^{-x}/\left(1-e^{-x}\right)^2 < \frac{1}{x^2}$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Отсюда получается, что:

$$p(n) < \frac{e^{c\sqrt{n}}}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-cm/2\sqrt{n}}}{\left(1-e^{-cm/2\sqrt{n}}\right)^2} < \frac{e^{c\sqrt{n}}}{n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4n}{c^2m^2} = e^{c\sqrt{n}}\frac{4}{c^2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right) = e^{c\sqrt{n}}.$$

Здесь мы использовали известное равенство для $\zeta(2)$, а именно: $\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Оценка сверху доказана. $\square$

4. Четвертое занятие, 25 июля 2023 г.

4.1. **Тождества Роджерса–Рамануджана.** Цель этой лекции — доказать следующие два тождества. Они называются *тождествами Роджерса–Рамануджана.* Они были доказаны Роджерсом еще в XIX веке, потом Рамануджан их переоткрыл, и в 1919 году они опубликовали с Роджерсом совместную статью. Независимо эти тождества были доказаны Исайей Шуром в 1917 году; ему принадлежит приводимое здесь комбинаторное доказательство. По существу оно является модификацией биекции Франклина (см. первое занятие).

Мы будем следовать упоминавшемуся выше обзору Игоря Пака. Доказательство Роджерса–Рамануджана можно прочесть, например, в книге: David M. Bressoud, *Proofs and confirmations* (AMS, 2000; в издательстве МЦНМО скоро выйдет русский перевод).

Теорема 4.1 (Роджерс–Рамануджан, Шур)**.** *Имеют место следующие тождества:*

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{k^2}}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^k)}=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5i+1})\,(1-q^{5i+4})}, \tag{$*$}$$

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{k(k+1)}}{(1-q)\,(1-q^2)\cdots(1-q^k)}=\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5i+2})\,(1-q^{5i+3})}. \tag{$**$}$$

Два этих тождества очень похожи, так что мы будем доказывать первое, оставив второе читателю в качестве упражнения. Но сперва разберемся, что они означают.

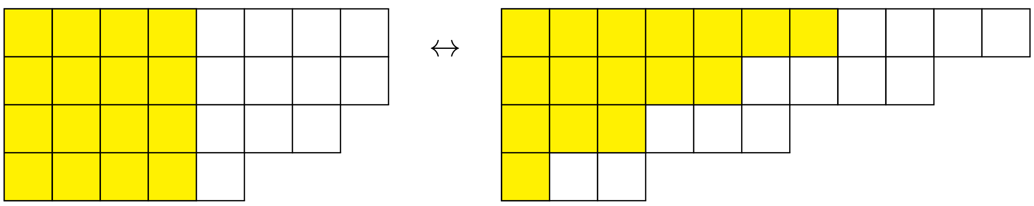
Правая часть тождества $(*)$ — это производящая функция для числа разбиений в сумму слагаемых, равных ±1 по модулю 5. Обозначим множество таких разбиений числа n через $\mathcal{A}_n$.

Далее, введем еще два множества разбиений. Пусть $\mathcal{B}_n$ обозначает множество разбиений n на части, любые две из которых отличаются хотя бы на 2 (будем говорить, что у такой диаграммы *существенно различные* строки). Наконец, пусть $\mathcal{C}_n$ — множество таких разбиений λ числа n, для которых последняя строка $b(\lambda)$ не меньше, чем число строк $\ell(\lambda)$.

Ясно, что производящая функция для мощностей множеств $\mathcal{C}_n$ — это левая часть равенства $(*)$.

Лемма 4.2. *Разбиений во множествах $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{C}_n$ поровну.*

Доказательство. Построим явную биекцию между этими множествами. Она изображена на рисунке ниже.



□

Лемма 4.3. *Имеет место равенство*

$$\prod_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5r+1})\,(1-q^{5r+4})}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(5m-1)}{2}}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^i)}.$$

Доказательство. Это следствие тождества Якоби для тройного произведения. Действительно, сделаем замену $q \mapsto q^5$ и подставим $x = -q^{-3}$. Получим, что

$$\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{5r-3})(1-q^{5r-2})(1-q^{5r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-q^2)^m q^{\frac{5m(m+1)}{2}}.$$

Домножив обе части на эйлеровскую производящую функцию $\prod(1-q^k)^{-1}$, получим требуемое. $\square$

Таким образом, получается, что тождество $(*)$ эквивалентно следующему равенству:

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i)\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^{k^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(5m-1)}{2}}. \qquad (***)$$

А его мы уже докажем комбинаторно.

4.2. **Биекция Шура.** Для начала введем некоторые обозначения. Пусть $\mathcal{D}_n$ — множество разбиений n на различные слагаемые, и $\mathcal{D} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{D}_n$. Далее, пусть $\mathcal{B} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}_n$. Наконец, пусть $\mathcal{R} = \mathcal{D}\times\mathcal{B}$ — множество пар из диаграммы Юнга с различными строками λ и диаграммы с существенно различными строками μ, и пусть $\mathcal{R}_n = \{(\lambda,\mu) \mid |\lambda|+|\mu| = n\}$ — множество пар таких диаграмм с суммарным весом n.

Знаком пары (λ,μ) будем называть $(-1)^{\ell(\lambda)}$, т.е. четность числа строк диаграммы λ.

Наша задача — построить биекцию α на множестве $\mathcal{R}_n$, которая меняет знак для всех пар, не являющихся неподвижными. Сначала определим множество неподвижных точек биекции следующим образом: это будут пары диаграмм (λ,μ), где $\lambda = (2m-1, 2m-2, \dots, m)$ и $\mu = (2m-1, 2m-3, \dots, 3, 1)$, а также $\lambda = (2m, 2m-1, \dots, m+1)$ и $\mu = (2m-1, 2m-3, \dots, 3, 1)$ (на рисунке ниже эти пары изображены при $m = 4$). Обратите внимание, что λ в этой биекции — это в точности неподвижные точки биекции Франклина.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $a(\lambda)$, $\ell(\lambda)$, $b(\lambda)$ и $d(\lambda)$ соответственно число столбцов диаграммы λ, ее строк, столбцов, длину нижней строки и диагонали (начинающейся от самой правой клетки вниз-влево ходом слона). Далее, через $u(\mu)$ будем обозначать «косую диагональ» диаграммы μ, также начинающуюся от самой правой клетки первой строки и идущей вниз-влево, но уже ходом коня.

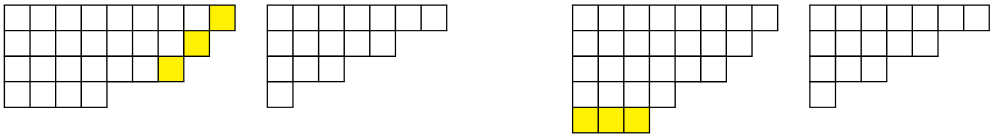
Теперь построим биекцию на остальных парах диаграмм (λ,μ). Для этого рассмотрим несколько случаев.

Во-первых, пусть $a(\lambda) > a(\mu)+2$. Тогда возьмем первую строку λ_1 диаграммы λ, отрежем и приклеим к μ сверху. Ясно, что в результате этого суммарная площадь диаграмм не изменится, но четность количества строк λ поменяется, т.к. число строк уменьшится на 1. Обратно, если $a(\lambda) < a(\mu)$, отрежем первую строку диаграммы μ и приклеим ее к λ.

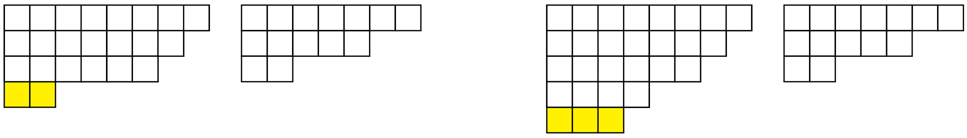
Остаются случаи, когда $a(\lambda) = a(\mu)$ и $a(\lambda) = a(\mu)+1$. Обозначим их через $\mathcal{R}_n^0$ и $\mathcal{R}_n^1$ и будем строить биекцию между этими множествами (за вычетом неподвижных точек, определенных выше). Мы построим отображение из $\mathcal{R}_n^1$ в $\mathcal{R}_n^0$. Итак, пусть $(\lambda,\mu) \in \mathcal{R}_n^1$. Наше отображение будет уравнивать длины первых строк этих диаграмм и менять число строк у диаграммы λ на один. Рассмотрим три числа: $b(\lambda)$,

$d(\lambda)$ и $u(\mu)$. Возьмем наименьшее из них; три эти возможности будут определять три случая.

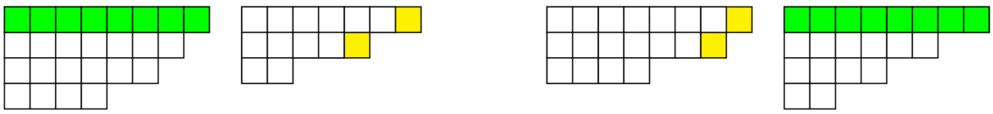
Случай 1. Пусть $d(\lambda) < b(\lambda)$ и $d(\lambda) \leq u(\mu)$. Тогда подействуем на λ биекцией Франклина: отрежем у λ диагональ и переставим ее в качестве нижней строки. Число строк у λ увеличится на один, а длины первых строк у λ и μ сравняются.



Случай 2. Пусть $b(\lambda) \leq d(\lambda)$ и $b(\lambda) \leq u(\mu)$. Тогда нижнюю строку из λ можно отрезать и переставить в качестве косой диагонали в μ. Число строк у λ уменьшится на один, а длины первых строк у λ и μ сравняются.



Случай 3. Пусть $u(\mu) < d(\lambda)$ и $u(\mu) \leq b(\lambda)$. Тогда возьмем у λ первую строку, а у μ косую диагональ. Затем одновременно переставим первую строку из λ в качестве первой строки в μ, а косую диагональ из μ поставим в качестве диагонали к λ (это будет возможно, т.к. в результате отрезания первой строки $d(\lambda)$ уменьшится на один, а неравенство $u(\mu) < d(\lambda)$ строгое). У получившихся пар диаграмм будут следующие характеристики: $a(\lambda') = a(\mu') = a(\lambda)$, $d(\lambda') = u(\mu)$, $u(\mu') > u(\mu)$.



Это отображение нетрудно обратить, так что оно будет биекцией между $\mathcal{R}_n^0$ и $\mathcal{R}_n^1$. Тем самым построено инволютивное отображение на $\mathcal{R}$, неподвижными точками которого являются пары диаграмм суммарного веса $\frac{m(5m-1)}{2}$ и $\frac{m(5m+1)}{2}$, которые берутся с весом $(-1)^m$. Это доказывает равенство $(***)$, а оно, как мы видели, эквивалентно первому тождеству Роджерса–Рамануджана $(*)$.

Задача 4.1. Действуя аналогично, докажите второе тождество Роджерса–Рамануджана $(**)$.

Email address: `esmirnov@hse.ru`