1. Аксиомы теории внутренних множеств

$\boxed{\text{Принцип расширения}}$

Система IST включает ZFC.

$\boxed{\text{Принцип переноса}}$

Для каждой *внутренней* формулы $\Phi(x, \overline{z})$ мы имеем свою аксиому переноса:

$$\mathtt{St}(\overline{z}) \to \big(\exists u\, \Phi(u, \overline{z}) \to \exists^{\mathtt{St}} u\, \Phi(u, \overline{z})\big) \tag{T}$$

Очевидно, тут можно заменить вторую «$\to$» на «$\leftrightarrow$». Кроме того, данную схему можно переформулировать в терминах $\forall$:

$$\mathtt{St}(\overline{z}) \to \big(\forall^{\mathtt{St}} u\, \Phi(u, \overline{z}) \to \forall u\, \Phi(u, \overline{z})\big).$$

При применении T важно помнить, что все параметры $(\overline{z})$ должны быть стандартными.

$\boxed{\text{Принцип идеализации}}$

Для каждой *внутренней* формулы $\Phi(x, y, \overline{z})$ иммеется своя аксиома идеализации:

$$\forall^{\mathtt{St\,Fin}} X\, \exists y\, (\forall u \in X)\, \Phi(u, y, \overline{z}) \to \exists y\, \forall^{\mathtt{St}} u\, \Phi(u, y, \overline{z}) \tag{I}$$

У Нельсона вместо «$\to$» стоит «$\leftrightarrow$», но «$\leftarrow$» окажется выводима в описанной нами версии IST.

$\boxed{\text{Принцип стандартизации}}$

Для каждой формулы $\Phi(x, \overline{z})$ (внутренней или внешней) мы имеем свою аксиому стандартизации:

$$\forall^{\mathtt{St}} X\, \exists^{\mathtt{St}} Y\, \forall^{\mathtt{St}} u\, (u \in X \wedge \Phi(u, \overline{z}) \leftrightarrow u \in Y), \tag{S}$$

т.е. для любого стандартного X найдётся стандартное Y такое, что

$$^\circ\{u \in X \mid \Phi(u, \overline{z})\} \;=\; ^\circ Y,$$

т.е. Y — стандартизация $\{u \in X \mid \Phi(u, \overline{z})\} = [\![x \in X \wedge \Phi(x, \overline{z})]\!]$.

2. Несколько упражнений

Доказательства следующих трёх утверждений остаются в качестве упражнений.

Утверждение 2.1: +I

Для каждой внутренней формулы $\Phi(x, y, \overline{z})$,

$$\left(\forall^{\mathtt{Fin}} X \subseteq Y\right)(\exists y \in Y)(\forall u \in X)\,\Phi(u, y, \overline{z}) \to (\exists y \in Y)\left(\forall^{\mathtt{St}} u \in Y\right)\Phi(u, y, \overline{z}). \qquad (\mathsf{I}')$$

Утверждение 2.2

Принцип стандартизации логически эквивалентен следующей схеме: для каждой формулы $\Phi(x, \overline{z})$,

$$\exists^{\mathtt{St}} X\,({}^{\circ}[\![\Phi]\!] \subseteq X) \to \exists^{\mathtt{St}} Y\,({}^{\circ}[\![\Phi]\!] = {}^{\circ}Y).$$

Пусть $\Phi(x, \overline{z})$ — формула. Ясно, что если у $[\![\Phi]\!]$ есть стандартизация, то

$${}^{\circ}[\![\Phi]\!] \;=\; {}^{\circ *}[\![\Phi]\!] \;\subseteq\; {}^{*}[\![\Phi]\!] \;=\; {}^{*\circ}[\![\Phi]\!].$$

В частности, ${}^{*}[\![\Phi]\!]$ включает ${}^{\circ}[\![\Phi]\!]$. Более того, имеет место:

Теорема 2.3

Пусть $\Phi(x, \overline{z})$ — формула, причём у $[\![\Phi]\!]$ есть стандартизация. Тогда

$$\forall^{\mathtt{St}} X\,({}^{\circ}[\![\Phi]\!] \subseteq X \to {}^{*}[\![\Phi]\!] \subseteq X).$$

Таким образом, ${}^{*}[\![\Phi]\!]$ является наименьшим по включению <u>стандартным</u> множеством, включающим ${}^{\circ}[\![\Phi]\!]$.

3. Упражнения с третьей лекции

Завершите доказательство утверждения о выделении станд. части ограниченного числа.

Утверждение 3.1

В IST выводимы следующие предложения:

i. $\forall X\,(\mathtt{St}\,(X) \wedge \mathtt{Fin}\,(X) \to X = {}^\circ X)$;

ii. $\forall X\,(X = {}^\circ X \to \mathtt{St}\,(X) \wedge \mathtt{Fin}\,(X))$; *%обратное к (i)*

iii. $\forall X\,(\mathtt{St}\,(X) \wedge \mathtt{Fin}\,(X) \to \forall U\,(U \subseteq X \to \mathtt{St}\,(U) \wedge \mathtt{Fin}\,(U)))$.

В ходе доказательства утверждения 3.1 полезно отмечать, какие принципы использовались в каждом из пунктов. Напоминаю, что с помощью (i) легко получить

$$(\forall n \in \mathbb{N})\left(\neg\mathtt{St}\,(n) \leftrightarrow \left(\forall^{\mathtt{St}} k \in \mathbb{N}\right)(k < n)\right),$$

а также схему, обратную к (I). Кроме того, на лекции мы показали, что

$$\exists^{\mathtt{Fin}} y\, \forall^{\mathtt{St}} u\,(u \in y)$$

(подставив $u \in y \wedge \mathtt{Fin}\,(y)$ вместо $\Phi\,(u, y, \overline{z})$ в I).

4. Упражнения с четвёртой лекции

Докажите «внешние» критерии, сформулированные на лекции.

Утверждение 4.1

В IST выводимы следующие предложения:

i. $(\forall x, y \in \mathbb{O})\,(x < y \to \operatorname{st}(x) \leqslant \operatorname{st}(y))$;

ii. $(\forall x, y \in \mathbb{O})\,(x < y \land x \not\approx y \to (\exists^{\mathsf{st}} r \in \mathbb{R})\,(x < r < y))$.