Теория внутренних множеств: Экскурс в историю

Станислав Сперанский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

(МЦМУ МИАН)

Дубна 2023

«Нестандартный» анализ: Немного истории

XVII век

- 1684: Лейбниц

  Первая публикация по дифференциальному исчислению.

  «Найти касательную — значит провести прямую, соедин. две точки кривой, расстояние между которыми бескон. мало».

- 1696: Лопиталь (в контакте с Бернулли ст.)

  Первый учебник мат. анализа: «Анализ бесконечно малых». В основе — научное наследие Лейбница и Ньютона.

  Лейбниц: «Бесконечно малое — количество, меньшее любого могущего быть заданным количества».

  Ньютон: «Бесконечно близкие — количества с исчезающей разностью, стремящиеся к равенству».

XVIII век

Постоянное, эффективное применение бесконечно малых.

Вместе с тем на протяжении многих лет и Эйлера, и Лагранжа критиковали за «неверное обоснование анализа».

1734: Теолог епископ Беркли критиковал тогдашних аналитиков, соглашаясь с их выводами, но не с методами.

1759: Д'Аламбер: «Бесконечно малые на самом деле не существуют ни в природе, ни в допущениях геометров».

XIX век

Больцано, Коши, Вейерштрасс.

Обоснование анализа с помощью теории пределов.

Эти достижения изложены во всяком современном уч. анализа.

Больцано ввел новый канон строгости в анализе.

Коши: «Бесконечно малая — это функция с нулевым пределом»; однако в своём определении предела Коши использовал не ε-δ, а специальные «переменные количества».

Вейерштрассом была разработана *эпсилон-дельта техника*.

Начало XX века

Недоверие к идее (актуального) бесконечно малого усиливается переустройством математики на основе теории множеств.

1934: Лузин выражал противоречивые взгляды:

«Не отрицая форм. возможности определить идею постоянного беск. малого, современный анализ рассматривает эту идею как совершенно бесплодную, *так как ввести такое бесконечно малое в исчисление оказывается невозможным*».

«Имеются какие-то глубоко скрытые причины, ещё до сих пор не выясненные полностью, которые заставляют наш ум быть расположенным к актуальным бесконечно малым».

«Актуально [бесконечно] малые будут совершенно реабилитированы с полной научной точки зрения».

1961 год

Абрахам Робинсон публикует свой «Нестандартный анализ».

В этой книге даётся современное обоснование метода (актуальных) бесконечно малых. В основе — теоретико-модельный подход.

Здесь бесконечно малые суть актуальные математические объекты, но всё же отделённые от «обычных чисел» и живущие в специальном расширении «стандартной модели».

Наконец, в 1977 году публикуется статья

> Nelson, E. Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.* 3:3, 1165–1198, 1977.

Под внутренней теорией множеств — сокращенно IST — понимается специальная теория в сигнатуре

$$\langle =^2, \in^2, \mathsf{St}^1 \rangle,$$

вдохновлённая подходом Робинсона. При этом IST оказывается *консервативным расширением* ZFC: для любого $\langle =, \in \rangle$-предложения Φ,

$$\mathsf{IST} \vdash \Phi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{ZFC} \vdash \Phi.$$

Значит, можно свободно пользоваться «нестандартными множествами» из IST в ходе получения результатов об «обычных множествах» из ZFC. Это полностью легитимизирует беск. большие и малые.

Замечание

Ещё Лейбниц — чьими обозначениями dx и $\int$ мы пользуемся по сей день — предсказывал, что метод бесконечно малых будет полностью легитимизирован в будущем.

Кроме того, Лейбниц мечтал об универсальных языке и исчислении, с помощью которых можно решать разнообразные задачи, в связи с чем уместно упомянуть:

- сильно полные исчисления для клас. логики предикатов;
- универсальные машины Тьюринга (своего рода ОС);
- современные разработки систем автоматического поиска доказательств и proof-ассистентов.