1. Аксиомы теории множеств

На начальном этапе развития теории множеств в ходу было наивное, или неформальное, представление о множествах. Под множеством понимали объединение с помощью силы мысли в одно целое определённого рода объектов, которые назывались его элементами. Так, можно говорить о:

- множестве всех положительных целых чисел;
- множестве всех атомов во Вселенной;
- множестве всех студентов, учащихся в российских вузах.

Поскольку у одного и того же множества может быть много описаний, следует отличать множества от их описаний. Далее, мы предполагаем, что:

i. в качестве множеств могут выступать как конечные, так и («актуально») бесконечные совокупности объектов;

ii. множества также являются легитимными объектами, а потому множества сами могут быть элементами множеств.

На самом деле, в стандартной теории множеств *абсолютно все объекты суть множества*, тогда как натуральные числа, точки вещественной прямой и другие традиционные типы объектов моделируются посредством множеств специального вида.

Говорят, что y содержит x, или x принадлежит y, и пишут $x \in y$, если x — элемент множества y; в противном случае используется запись $x \notin y$. Интуитивно приемлемым и достаточно естественным кажется следующее правило образования множеств:

Наивная схема аксиом выделения

Пусть $\Phi(x)$ — условие на объекты. Тогда существует множество всех объектов, удовлетворяющих Φ, которое обозначается $\{x \mid \Phi(x)\}$.

Однако применения этого правила могут приводить к различным парадоксам, самым известным среди которых является:

Парадокс Рассела

Обозначим $\{x \mid x \notin x\}$ через R. Тогда $R \in R$ равносильно $R \notin R$.

В результате борьбы с такими парадоксами теория множеств обзавелась формальной аксиоматикой. Множеством мы можем назвать совокупность объектов, наличие которой гарантируется имеющимися аксиомами.

Здесь стоит упомянуть ещё один парадокс:

Парадокс Берри

Пусть n — это наименьшее натуральное число, которое нельзя описать менее чем 11 словами. Тогда n описывается 10 словами.

Ответственность за него несёт туманная фраза «нельзя описать». Поэтому перед тем как приступить к изложению аксиом, нужно определить рабочий язык теории множеств и пояснить, что подразумевается под «условиями на объекты».

В рамках теории множеств под условиями мы будем понимать выражения специального рода. Самые простые из них, называемые базовыми, имеют вид

$$x \in y \quad \text{или} \quad x = y,$$

где x и y суть переменные, играющие роль произвольных множеств.[1] Более сложные условия строятся из базовых с помощью обычных логических связок

«не ...», «... и ...», «... или ...»

«если ..., то ...» и «... тогда и только тогда, когда ...»

и кванторов

«для любого x ...» и «существует x такой, что ...».

Мы будем нередко пользоваться символической записью и обозначать логические связки соответственно через $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ и $\leftrightarrow$, а кванторы — через $\forall x$ и $\exists x$.

[1] Разумеется, $x = y$ читается как «x равно y» или «x совпадает с y».

В качестве примера рассмотрим условие

$$\Phi \;:=\; \forall y \, (y \notin x),$$

где $y \notin x$ является сокращением для $\neg y \in x$. Оно утверждает следующее:

$$\text{\textit{для любого } } y \text{ \textit{верно, что} } x \text{ \textit{не содержит} } y. \tag{$*$}$$

Так как в стандартной теории множеств все объекты суть множества, $(*)$ означает, что в x вообще нет элементов. При этом стоящие внутри скобок y и x имеют разный статус:

- y находится в области действия некоторого квантора по y, а именно $\forall y$;
- x не находится в области действия какого-либо квантора по x.

В такой ситуации x принято называть свободным (в Φ), а y — связанным. Интуитивно Φ зависит от x, а не от y. Чтобы это подчеркнуть, вместо Φ пишут $\Phi\,(x)$.

В дальнейшем запись $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ будет означать, что каждая переменная y, отличная от $x_1, \ldots, x_n$, либо связана, либо её значение предполагается фиксированным.

Замечание. Для наглядности мы будем также использовать сокращения

$$(\forall x \in y)\, \Phi \;:=\; \forall x\, (x \in y \to \Phi) \quad \text{и} \quad (\exists x \in y)\, \Phi \;:=\; \exists x\, (x \in y \wedge \Phi).$$

Тут $(\forall x \in y)$ и $(\exists x \in y)$ можно воспринимать как «ограниченные кванторы»: значения, которые пробегает x, ограничены элементами y.

Система Цермело–Френкеля, ZF

В основе современной теории множеств лежат аксиомы, предложенные Цермело и Френкелем. К ним обычно добавляется так называемая аксиома выбора; мы сформулируем её несколько позже, после определения функций в теории множеств.

Аксиома экстенсиональности

Часто можно услышать следующее: «Множество определяется своими элементами». Эта идея формализуется посредством аксиомы экстенсиональности:

$$\forall X\,\forall Y\,(\forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y). \tag{Ext}$$

Отметим, что обратное утверждение, а именно

$$\forall X\, \forall Y\, (X = Y \to \forall u\, (u \in X \leftrightarrow u \in Y)),$$

выглядит интуитивно очевидным, если понимать равенство двух объектов как их совпадение. Подобные утверждения традиционно называют аксиомами равенства. Обычно их по умолчанию включают во всякую систему, в языке которой есть символ $=$, и ZF не является исключением.

Далее, введём сокращение

$$x \subseteq y \ := \ \forall u\, (u \in x \to u \in y).$$

Если $X \subseteq Y$, то говорят, что Y включает X, или X — подмножество Y (либо Y — надмножество X). Очевидно, $X = Y$ равносильно $X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$.

Запись $X \subsetneq Y$ будет использоваться как сокращение для $X \subseteq Y \wedge X \neq Y$. Мы будем называть X собственным подмножеством Y, если $X \subsetneq Y$.

Аксиома пустого множества

Нет ничего проще, чем совокупность, в которой вообще нет элементов. Её существование гарантирует аксиома пустого множества:

$$\exists X\, \forall u\, (u \in X \leftrightarrow u \neq u). \tag{Empty}$$

Разумеется, такое X будет единственно, в силу Ext. Его обозначают через $\varnothing$ и называют пустым множеством.

Аксиома пары

Простейшей из аксиом, позволяющих строить новые множества по уже имеющимся, является аксиома пары:

$$\forall X \, \forall Y \, \exists Z \, \forall u \, (u \in Z \leftrightarrow (u = X \vee u = Y)). \tag{Pair}$$

Значит, если даны X и Y, то мы можем получить Z, содержащее в точности X и Y, причём такое Z единственно (в силу Ext). Полученное Z обозначают через $\{X, Y\}$ и называют неупорядоченной парой X и Y. Очевидно,

$$\{X, Y\} \; = \; \{Y, X\}$$

(по Ext). В случае, когда X совпадает с Y, вместо $\{X, X\}$ пишут $\{X\}$; при этом $\{X\}$ называют синглетоном X.

Определим упорядоченную пару X_1 и X_2 как

$$(X_1, X_2) \ := \ \{\{X_1\}, \{X_1, X_2\}\}.$$

Нетрудно убедиться, что для любых X_1, X_2, Y_1 и Y_2,

$$(X_1, X_2) \ = \ (Y_1, Y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1 = Y_1 \ \text{и} \ X_2 = Y_2. \tag{$\star$}$$

Более того, можно определить упорядоченны тройки, четвёрки и так далее:

$$\begin{aligned}
(X_1, X_2, X_3) \ &:= \ ((X_1, X_2), X_3), \\
(X_1, X_2, X_3, X_4) \ &:= \ ((X_1, X_2, X_3), X_4), \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Соответствующие им аналоги $(\star)$ также будут верны.

Схема аксиом выделения

Под схемами понимаются группы однородных аксиом. Так, каждому условию $\Phi(x)$ мы сопоставляем свою аксиому выделения:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u))). \tag{Sep}$$

Она утверждает, что для любого X мы можем образовать множество Y всех $u \in X$, которые удовлетворяют $\Phi(u)$. Такое Y единственно ввиду Ext. Мы будем обозначать его через $\{u \in X \mid \Phi(u)\}$.

Вместе с тем выражение $\{u \mid \Phi(u)\}$ может и не задавать множества; однако в случае, когда предварительно установлено, что $\exists Z\, \forall u\, (u \in Z \leftrightarrow \Phi(u))$ (а таких Z не может быть более одного, в силу Ext), мы будем считать его легитимным.

С помощью Sep легко получить следующее:

- для любых X и Y выражения

$$X \cap Y \ := \ \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\} \quad \text{и} \quad X \setminus Y \ := \ \{u \mid u \in X \wedge u \notin Y\}$$

  задают множества;

- для всякого непустого X выражение

$$\bigcap X \ := \ \{u \mid u \in v \text{ для всех } v \in X\}$$

  задаёт множество.

При этом $X \cap Y$ и $X \setminus Y$ называют пересечением X и Y и их разностью соответственно, а $\bigcap X$ — пересечением X. Очевидно, $X \cap Y = \bigcap\{X, Y\}$.

Аксиома объединения

Эта аксиома позволяет собирать элементы элементов данного множества воедино:

$$\forall X\, \exists Y\, \forall u\, (u \in Y \leftrightarrow \exists v\, (v \in X \wedge u \in v)). \tag{Union}$$

Таким образом, выражение

$$\bigcup X \ := \ \{u \mid u \in v \text{ для некоторого } v \in X\}$$

задаёт множество, которое называют объединением X. В частности, для любых X и Y под объединением X и Y понимают

$$X \cup Y \ := \ \bigcup \{X, Y\},$$

которое совпадает с $\{u \mid u \in X \vee u \in Y\}$. Когда X и Y не пересекаются, т.е. $X \cap Y = \varnothing$, вместо $X \cup Y$ иногда пишут $X \sqcup Y$.

Теперь мы можем определить неупорядоченны тройки, четвёрки и так далее:

$$\begin{aligned} \{X_1, X_2, X_3\} &:= \{X_1, X_2\} \cup \{X_3\}, \\ \{X_1, X_2, X_3, X_4\} &:= \{X_1, X_2, X_3\} \cup \{X_4\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что X_1, X_2, X_3, X_4, $\ldots$ попарно различными.

Аксиома степени

Эта аксиома позволяет собирать все подмножества данного множества воедино:

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X). \qquad \text{(Power)}$$

Таким образом, выражение

$$\mathcal{P}(X) \; := \; \{u \mid u \subseteq X\}$$

задаёт множество, которое называют множеством-степенью X.

Пусть даны X и Y. Очевидно, для всех $x \in X$ и $y \in Y$ мы имеем $x, y \in X \cup Y$, откуда $\{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(X \cup Y)$, что влечёт $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$. Поэтому выражение

$$\begin{aligned} X \times Y \;&:=\; \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\} \\ &=\; \{u \mid \exists x\, \exists y\, (u = (x, y) \wedge x \in X \wedge y \in Y)\} \end{aligned}$$

задаёт подмножество $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y))$, которое называется декартовым произведением X и Y, либо прямым произведением X и Y.

Аксиома бесконечности

Рассмотрим условие

$$\operatorname{Ind}(x) \ := \ \varnothing \in x \wedge \forall u \, (u \in x \to u \cup \{u\} \in x).$$

Мы будем называть X индуктивным, если $\operatorname{Ind}(X)$. Интуитивно всякое индуктивное множество бесконечно. Поэтому сформулируем аксиому бесконечности так:

$$\exists X \operatorname{Ind}(X). \tag{Inf}$$

Стало быть, Inf гарантирует существование некоторого индуктивного множества.

Схема аксиом подстановки

Каждому условию $\Phi(x, y)$ мы сопоставляем свою аксиому подстановки:

$$\forall x\, \forall y_1\, \forall y_2\, ((\Phi(x, y_1) \wedge \Phi(x, y_2)) \to y_1 = y_2) \quad \longrightarrow \\ \forall X\, \exists Y\, \forall y\, (y \in Y \leftrightarrow \exists x\, (x \in X \wedge \Phi(x, y))). \tag{Repl}$$

Итак, если $\Phi(x, y)$ удовлетворяет посылке Repl, т.е. в определенном смысле является «функциональным», то для любого X выражение

$$\{y \mid \exists x\, (x \in X \wedge \Phi(x, y))\}$$

задаёт множество, представляющее собой «полный образ X относительно Φ».

Аксиома регулярности

На структуру универса всех множеств оказывает существенное влияние аксиома регулярности, также именуемая аксиомой фундированности:

$$\forall X\,(X \neq \varnothing \to \exists u\,(u \in X \wedge X \cap u = \varnothing)). \tag{Reg}$$

Однако нам она понадобится лишь ближе к концу курса.

Отношения

Под бинарными (либо двухместными) отношениями между X и Y понимаются произвольные подмножества $X \times Y$. В случае, когда $X = Y$, их ещё называют бинарными (или двухместным) отношениями на X.

Замечание. Разумеется, по аналогии можно дать определение трёхместных, четырёхместных и так далее отношений. Однако ключевую роль играют именно двухместные.

Пусть $R \subseteq X \times Y$. Далее мы будем часто прибегать к «инфиксной нотации» и писать xRy вместо $(x, y) \in R$. Под областью определения R и областью значений R понимают

$$\mathrm{dom}\,(R) \;:=\; \{u \in X \mid \exists v\, uRv\} \quad \text{и} \quad \mathrm{range}\,(R) \;:=\; \{v \in Y \mid \exists u\, uRv\}$$

соответственно. Кроме того, для каждого $U \subseteq X$ множество

$$\begin{aligned} R\,[U] \;&:=\; \mathrm{range}\,(R \cap U \times Y) \\ &=\; \{v \in Y \mid \exists u\,(u \in U \wedge uRv)\} \end{aligned}$$

называют образом U относительно R. Обратное к R отношение определяют как

$$R^{-1} \;:=\; \{(y, x) \mid xRy\}.$$

Очевидно, при этом $R^{-1} \subseteq Y \times X$. Для каждого $V \subseteq Y$ образ V относительно R^{-1} также называют прообразом V относительно R. Ясно, что

$$\operatorname{range}(R) \;=\; \operatorname{dom}\left(R^{-1}\right) \;=\; R[X] \quad \text{и} \quad \operatorname{range}\left(R^{-1}\right) \;=\; \operatorname{dom}(R) \;=\; R^{-1}[Y].$$

Среди бинарных отношений на X особое место занимает тождественное отношение на X, определяемое как

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X &:= \{(x,x) \mid x \in X\} \\ &= \{(x,y) \in X \times X \mid x = y\}. \end{aligned}$$

Наконец, бинарные отношения можно естественным образом комбинировать: для любых $R \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$ под композицией R и Q мы будем понимать

$$R \circ Q \;:=\; \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y\,(xRy \wedge yQz)\}.$$

Стоит отметить, что в алгебре композицию нередко задают в обратном порядке.

Функции

Рассмотрим условие

$$\mathrm{Func}\,(x) \;:=\; \forall u\, \forall v_1\, \forall v_2\, ((u, v_1) \in x \wedge (u, v_2) \in x \to v_1 = v_2).$$

Мы будем говорить, что $R \subseteq X \times Y$ функционально, если $\mathrm{Func}\,(R)$.[2] Обозначим

$$Y^X \;:=\; \{f \in \mathcal{P}\,(X \times Y) \mid \mathrm{dom}\,(f) = X \text{ и } f \text{ функционально}\}.$$

Элементы Y^X называют функциями из X в Y; вместо $f \in Y^X$ обычно пишут $f : X \to Y$. Далее, говорят, что функция f из X в Y является:

- сюрьективной, или действующей на Y, если $\mathrm{range}\,(f) = Y$;
- инъективной, или одно-однозначной, если f^{-1} функционально.
- биективной, если f сюрьективна и инъективна.

[2] В роли «метапеременных» для функциональных отношений обычно выступают f, g, h, $\ldots$

Мы будем часто выражать соответствующие условия следующим образом:

$$f : X \xrightarrow{\text{на}} Y, \qquad f : X \xrightarrow{\text{1-1}} Y \qquad \text{и} \qquad f : X \xrightarrow[\text{на}]{\text{1-1}} Y.$$

Сюрьективные функции нередко называют сюрьекциями, инъективные — инъекциями, а биективные — биекциями.

Пусть $f : X \to Y$. Ясно, что если $x \in X$, то существует единственное $y \in Y$ такое, что $(x, y) \in f$, которое называют значением f в x и обозначают через $f(x)$. Стало быть,

$$\begin{aligned} \operatorname{range}(f) &= \{f(x) \mid x \in X\} \\ &= \{y \mid \exists x\, (x \in X \wedge f(x) = y)\}. \end{aligned}$$

Для каждого $U \subseteq X$ ограничение (или сужение) f на U определяется как

$$f\restriction_U \;:=\; f \cap U \times Y.$$

Разумеется, $f\restriction_U$ будет функцией из U в Y. Вообще, если $f : X \to Y$ и $g : U \to Y$ таковы, что $U \subseteq X$ и $f\restriction_U = g$, то g называют ограничением f, а f — расширением g.

Особое место в нашей системе занимает:

Аксиома выбора

Она утверждает, что для всякого множества непустых множеств существует «функция выбора», которая выбирает элемент в каждом его элементе:

$$\forall X \left(\varnothing \notin X \to \exists f \left(f : X \to \bigcup X \wedge \forall u \in X \left(f\left(u\right) \in u\right)\right)\right). \tag{C}$$

Эта аксиома имеет довольно неоднозначную историю; тем не менее, она необходима для получения важных результатов в комбинаторике бесконечного.

2. Натуральные числа

Из Inf с помощью Sep можно вывести:

Утверждение 2.1

$$\exists X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \wedge \forall Y\,(\mathrm{Ind}\,(Y) \to X \subseteq Y)). \tag{Nat}$$

Доказательство. Зафиксируем какое-нибудь индуктивное множество X_0. Возьмём

$$\mathbb{N} \;:=\; \{x \in X_0 \mid \forall X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \to x \in X)\}.$$

По построению $\forall X\,(\mathrm{Ind}\,(X) \to \mathbb{N} \subseteq X)$. Кроме того, легко проверить, что $\mathrm{Ind}\,(\mathbb{N})$. □

Значит, существует наименьшее по включению индуктивное множество; его обозначают через $\mathbb{N}$. Элементы $\mathbb{N}$ называют натуральными числами.

Определим функцию последователя из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ как

$$\mathsf{s} \;:=\; \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = n \cup \{n\}\}.$$

Если $n \in \mathbb{N}$, то вместо $\mathsf{s}(n)$ нередко пишут $n + 1$.[3] Итак, с полуформальной точки зрения $\mathbb{N}$ содержит в точности

$$\begin{aligned}
0 &:= \varnothing, \\
1 &:= 0 + 1 = \{0\}, \\
2 &:= 1 + 1 = \{0, 1\}, \\
3 &:= 2 + 1 = \{0, 1, 2\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

[3] При этом функция сложения на натуральных числах у нас ещё не определена.

Под (естественным) порядком на $\mathbb{N}$ мы будем понимать отношение

$$< \;:=\; \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \in m\}.$$

Разумеется, для всех $n, m \in \mathbb{N}$:

i. $\neg n < 0$;

ii. $m < n + 1 \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$.

При выводе более сложных утверждений используется:

Принцип индукции

Пусть X удовлетворяет условию

$$X(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\,(X(n) \to X(n+1)).$$[4]

Тогда $(\forall n \in \mathbb{N})\,X(n)$, т.е. $\mathbb{N} \subseteq X$. $\square$

[4]Для наглядности здесь и далее мы порой пишем $X(u)$ вместо $u \in X$.

Утверждение 2.2

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеет место $n \subseteq \mathbb{N}$, т.е. $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$. $\square$

Утверждение 2.3

Для всех $n, m, k \in \mathbb{N}$:

i. $\neg n < n$;

ii. $(k < m \wedge m < n) \to k < n$;

iii. $n < m \vee n = m \vee m < n$;

iv. $0 \leqslant n$;

v. $m < n \leftrightarrow m + 1 \leqslant n$. $\square$

Далее, корректность простых рекурсивных определений гарантирует:

Теорема о рекурсии

Пусть $y_0 \in Y$ и $h : Y \to Y$. Тогда существует единственная $f : \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} y_0 & \text{если } n = 0, \\ h(f(m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases} \qquad (\star)$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Мы будем называть функцию f из $k+1$ в Y правильной, если $(\star)$ верно для всех $n \in k+1$. Возьмём

$$S := \{k \in \mathbb{N} \mid \text{существует единственная правильная } f : k+1 \to Y\}.$$

Если $k \in S$, то через f_k будет обозначаться соответствующая (единственная) правильная функция из $k+1$ в Y.

Установим по индукции, что $S = \mathbb{N}$.

База индукции: Очевидно, $\{(0, y_0)\}$ — это единственная правильная функция из $0+1$ в Y. Стало быть, $0 \in S$.

Шаг индукции: Предположим, что $k \in S$. Возьмём

$$g \ := \ f_k \cup \{(k+1, h(f_k(k)))\}.$$

Как нетрудно убедиться, g — правильная функция из $(k+1)+1$ в Y. Проверим её единственность. Пусть g' — правильная функция из $(k+1)+1$ в Y.

a. Разумеется, ограничение g' на $k+1$ окажется правильным, а потому совпадёт с f_k, т.е. с ограничением g на $k+1$;

b. Кроме того, $g'(k+1) = h(g'(k)) = h(g(k)) = g(k+1)$.

Следовательно, $g' = g$. Таким образом, $k+1 \in S$.

В итоге $S = \mathbb{N}$. Обозначим

$$f \ := \ \bigcup \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Можно проверить, что f — искомая функция из $\mathbb{N}$ в Y. $\square$

При желании можно добавить параметры:

Параметризованная теорема о рекурсии

Пусть $g_0 \in Y^X$ и $h : X \times Y \to Y$. Тогда существует единственная $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ такая, что для любых $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x, n) = \begin{cases} g_0(x) & \text{если } n = 0, \\ h(x, f(x, m)) & \text{если } n = m + 1. \end{cases}$$

Доказательство. Для каждой $g \in Y^X$ определим $h_g : X \to Y$ по правилу

$$h_g(x) \;:=\; h(x, g(x)).$$

Рассмотрим $h' : Y^X \to Y^X$, действующую следующим образом:

$$h'(g) \;:=\; h_g.$$

Как мы знаем, существует единственная $f' : \mathbb{N} \to Y^X$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$,

$$f'(n) \;=\; \begin{cases} g_0 & \text{если } \; n = 0, \\ h'(f'(m)) & \text{если } \; n = m + 1. \end{cases}$$

В свою очередь, от f' можно перейти к $f : X \times \mathbb{N} \to Y$ по правилу

$$f(x, n) \;:=\; (f'(n))(x).$$

Можно проверить, что f окажется искомой функцией. $\square$

Например, параметризованная рекурсия позволяет нам задать функцию сложения из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{cases} +(k, 0) & = \; k, \\ +(k, \mathsf{s}(m)) & = \; \mathsf{s}(+(k, m)). \end{cases}$$

Нужные $g_0 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ тут определяются по правилам

$$g_0(k) \; := \; k \quad \text{и} \quad h(k, n) \; := \; \mathsf{s}(n).$$

Разумеется, вместо $+(k, n)$ обычно пишут $k + n$. При этом

$$+(k, 1) \; = \; +(k, \mathsf{s}(0)) \; = \; \mathsf{s}(+(k, 0)) \; = \; \mathsf{s}(k),$$

а потому данная запись согласуется с ранее введённым обозначением $k + 1$ для $\mathsf{s}(k)$.

С помощью параметризованной рекурсии легко задать и другие арифметические операции, такие как умножение и возведение в степень:

$$\begin{cases} k \cdot 0 & = \ 0, \\ k \cdot \mathsf{s}\,(m) & = \ (k \cdot m) + k \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} k^0 & = \ 1, \\ k^{\mathsf{s}(m)} & = \ k^m \cdot k. \end{cases}$$

(Здесь мы считаем $0^0 = 1$.)

По индукции можно установить различные полезные свойства трёх вышеупомянутых операций.