Теория внутренних множеств — 2

Станислав Сперанский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Дубна 2023

Теория внутренних множеств (IST)

Пусть σ — сигнатура теории множеств, обогащённая специальным одноместным предикатным символом $\mathtt{St}$, т.е. $\langle \in^2, =^2, \mathtt{St}^1 \rangle$. Далее под формулами мы будем понимать σ-формулы.

Формула называется внутренней, если она не содержит вхождений $\mathtt{St}$, и внешней иначе.

Принцип расширения

Система IST включает ZFC. В частности, для каждой *внутренней* формулы $\Phi(x, \bar{z})$ имеется своя аксиома выделения:

$$\forall X \, \exists Y \, \forall u \, (u \in Y \leftrightarrow (u \in X \wedge \Phi(u, \bar{z}))).$$

Однако для внешних формул таких аксиом нет ни в ZFC, ни в IST — иначе в IST можно было бы легко вывести противоречие.

Принцип переноса

Для каждой *внутренней* формулы $\Phi(x, \overline{z})$ мы имеем свою аксиому переноса:

$$\mathtt{St}(\overline{z}) \to \left(\exists u\, \Phi(u, \overline{z}) \to \exists^{\mathtt{St}} u\, \Phi(u, \overline{z})\right) \tag{T}$$

(точнее, нужно взять её универсальное замыкание). Очевидно, тут можно заменить вторую «$\to$» на «$\leftrightarrow$». Кроме того, данную схему можно переформулировать в терминах $\forall$:

$$\mathtt{St}(\overline{z}) \to \left(\forall^{\mathtt{St}} u\, \Phi(u, \overline{z}) \to \forall u\, \Phi(u, \overline{z})\right).$$

При применении T важно помнить, что все параметры $(\overline{z})$ должны быть стандартными.

Утверждение (+T)

Для каждой внутренней формулы $\Phi(x, \overline{z})$,

$$\mathtt{St}(\overline{z}) \wedge \exists! u\, \Phi(u, \overline{z}) \wedge \Phi(x, \overline{z}) \to \mathtt{St}(x).$$

$\square$

Например, отсюда следует выводимость $\mathtt{St}(\mathbb{N})$, а также

$$\mathtt{St}(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(\mathtt{St}(n) \to \mathtt{St}(n+1)). \tag{$*$}$$

При этом из $(*)$ нельзя вывести $(\forall n \in \mathbb{N})\, \mathtt{St}(n)$, применяя принцип индукции, так как $\mathtt{St}(x)$ — внешняя формула.

Утверждение (+T)

Для каждой внутренней формулы $\Phi(\overline{z})$,

$$\mathtt{St}(\overline{z}) \to \left(\Phi(\overline{z}) \leftrightarrow \Phi^{\mathtt{St}}(\overline{z})\right),$$

где $\Phi^{\mathtt{St}}(\overline{z})$ — релятивизация $\Phi(\overline{z})$ на $\mathtt{St}$.

Доказательство.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi(\overline{z})$ имеет вид

$$\mathrm{Q}_1 u_1 \ \ldots \ \mathrm{Q}_n u_n \, \Psi(u_1, \ldots, u_n, \overline{z}),$$

где $\{\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_n\} \subseteq \{\forall, \exists\}$ и $\Psi(u_1, \ldots, u_n, \overline{z})$ — бескванторная. Далее идёт простая индукция по n. [. . .] □

Пусть $\Phi(x, \overline{z})$ — формула. Ей соответствует класс/«куча»

$$[\![\Phi]\!] := \{x \mid \Phi(x, \overline{z})\}.$$

Ясно, что $[\![\Phi]\!]$ не обязан быть множеством. При этом запись $u \in [\![\Phi]\!]$ означает $\Phi(u, \overline{z})$. Далее, обозначим

$$^{\circ}[\![\Phi]\!] := \{x \mid \Phi(x, \overline{z}) \wedge \mathtt{St}(x)\}.$$

Этот класс называется ядром (класса) $[\![\Phi]\!]$. Если в качестве Φ взять $x \in X$, мы получим $[\![\Phi]\!] = X$, однако $^{\circ}X$ по-прежнему будет классом (который не обязан быть множеством).

Утверждение (+T)

i. $\forall^{\mathrm{St}} X \, \forall^{\mathrm{St}} Y \, (X \subseteq Y \leftrightarrow {}^\circ X \subseteq {}^\circ Y)$;

ii. $\forall^{\mathrm{St}} X \, \forall^{\mathrm{St}} Y \, (X = Y \leftrightarrow {}^\circ X = {}^\circ Y)$.

Доказательство.

$\boxed{\text{i}}$ Пусть X и Y стандартны. Очевидно, $X \subseteq Y$ влечёт ${}^\circ X \subseteq {}^\circ Y$ (это верно для любых X и Y, не обязательно стандартных). С другой стороны, если $\forall^{\mathrm{St}} u \, (u \in X \to u \in Y)$, то $\forall u \, (u \in X \to u \in Y)$ ввиду T.

$\boxed{\text{ii}}$ Следует из (i). □

Для каждой формулы $\Phi\,(x, \overline{z})$ существует не более одного стандартного X такого, что ${}^\circ X = {}^\circ[\![\Phi]\!]$; такое X (при его наличии) называют стандартизацией $[\![\Phi]\!]$ и обозначают через ${}^*[\![\Phi]\!]$.

Принципы идеализации и стандартизации

Продолжение следует...