Теория внутренних множеств — 3

Станислав Сперанский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Дубна 2023

Принцип идеализации

Для каждой *внутренней* формулы $\Phi\,(x, y, \overline{z})$ иммеется своя аксиома идеализации:

$$\forall^{\mathtt{St}\ \mathtt{Fin}} X\, \exists y\, (\forall u \in X)\, \Phi\,(u, y, \overline{z}) \to \exists y\, \forall^{\mathtt{St}} u\, \Phi\,(u, y, \overline{z}) \qquad (\mathrm{I})$$

(точнее, нужно взять её универсальное замыкание). В [Nelson 1977] вместо «$\to$» стоит «$\leftrightarrow$», но «$\leftarrow$» окажется выводима в описанной нами версии IST.

Утверждение (+I)

Для каждой внутренней формулы $\Phi\,(x, y, \overline{z})$,

$$\left(\forall^{\mathtt{Fin}} X \subseteq Y\right) (\exists y \in Y)\, (\forall u \in X)\, \Phi\,(u, y, \overline{z}) \to \\ (\exists y \in Y) \left(\forall^{\mathtt{St}} u \in Y\right) \Phi\,(u, y, \overline{z}). \qquad (\mathrm{I}')$$

Доказательство.

Остаётся в качестве упражнения. □

Следствие (+T, I)

$(\exists n \in \mathbb{N})\,(\forall^{\mathtt{St}} k \in \mathbb{N})\; k < n.$ *%откуда* $(\exists n \in \mathbb{N})\,\neg\mathtt{St}\,(n)$

Доказательство.

Подставляя $x \in y$ и $\mathbb{N}$ вместо $\Phi\,(x, y, \overline{z})$ и Y в I′, мы получаем

$$(\forall^{\mathtt{Fin}} X \subseteq \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,(\forall u \in X)\; u \in y \to (\exists y \in \mathbb{N})\,(\forall^{\mathtt{St}} u \in \mathbb{N})\; u \in y.$$

Осталось заметить, что посылка этой импликации истинна. □

Следствие $(+\mathrm{T}, \mathrm{I})$

${}^\circ\mathbb{N}$ не является множеством, т.е. $\neg\exists X\, X = {}^\circ\mathbb{N}$.

Доказательство.

Допустим, что ${}^\circ\mathbb{N}$ — множество. Значит, $\mathbb{N} \setminus {}^\circ\mathbb{N}$ — снова множество, причём непустое. Обозначим через n наименьший элемент в $\mathbb{N} \setminus {}^\circ\mathbb{N}$. Очевидно, $n \neq 0$. Тогда $n - 1 \in {}^\circ\mathbb{N}$, а потому $n = (n-1) + 1 \in {}^\circ\mathbb{N}$ — противоречие. $\square$

[. . .]

Принцип стандартизации

Для каждой формулы $\Phi(x, \overline{z})$ (внутренней или внешней) мы имеем свою аксиому стандартизации:

$$\forall^{\mathrm{St}} X\, \exists^{\mathrm{St}} Y\, \forall^{\mathrm{St}} u\, (u \in X \wedge \Phi(u, \overline{z}) \leftrightarrow u \in Y) \tag{S}$$

(точнее, нужно взять её универсальное замыкание), т.е. для любого стандартного X найдётся стандартное Y такое, что

$$^{\circ}\{u \in X \mid \Phi(u, \overline{z})\} \;=\; ^{\circ}Y,$$

т.е. Y — стандартизация $\{u \in X \mid \Phi(u, \overline{z})\} = [\![x \in X \wedge \Phi(x, \overline{z})]\!]$.

Утверждение

Принцип стандартизации логически эквивалентен следующей схеме: для каждой формулы $\Phi(x, \overline{z})$,

$$\exists^{\mathrm{St}} X \left({}^{\circ}[\![\Phi]\!] \subseteq X\right) \rightarrow \exists^{\mathrm{St}} Y \left({}^{\circ}[\![\Phi]\!] = {}^{\circ}Y\right).$$

Доказательство.

Остаётся в качестве упражнения. $\square$

Пусть $\Phi(x, \overline{z})$ — формула. Ясно, что если у $[\![\Phi]\!]$ есть стандартизация, то

$${}^{\circ}[\![\Phi]\!] \;=\; {}^{\circ *}[\![\Phi]\!] \;\subseteq\; {}^{*}[\![\Phi]\!] \;=\; {}^{*\circ}[\![\Phi]\!].$$

В частности, ${}^{*}[\![\Phi]\!]$ включает ${}^{\circ}[\![\Phi]\!]$. Более того, имеет место:

Теорема

Пусть $\Phi(x, \overline{z})$ — формула, причём у $[\![\Phi]\!]$ есть стандартизация. Тогда

$$\forall^{\mathtt{St}} X \left({}^{\circ}[\![\Phi]\!] \subseteq X \to {}^{*}[\![\Phi]\!] \subseteq X\right).$$

Таким образом, ${}^{*}[\![\Phi]\!]$ является наименьшим по включению <u>стандартным</u> множеством, включающим ${}^{\circ}[\![\Phi]\!]$.

Доказательство.

Остаётся в качестве упражнения. $\square$

Замечание

В формулировке теоремы выше нельзя заменить $\forall^{\mathtt{St}}$ на $\forall$: например, ${}^*\mathbb{N} = {}^{*\circ}\mathbb{N} = \mathbb{N}$, но ${}^\circ\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{n\} \subsetneq \mathbb{N}$, где n — какое-нибудь нест. натуральное число.

Замечание

Может случиться так, что $[\![\Phi]\!] \not\subseteq {}^*[\![\Phi]\!]$, или ${}^*[\![\Phi]\!] \not\subseteq [\![\Phi]\!]$, или даже оба включения нарушаются. Например, рассмотрим

$$\Phi(x) \;:=\; (\exists n \in \mathbb{N})(\mathtt{St}(n) \wedge x = 2n) \vee x = 2m + 1,$$

где m — какое-нибудь нестандартное натуральное число. Разумеется, ${}^*[\![\Phi]\!]$ совпадает с $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Стало быть,

$$2m+1 \;\in\; [\![\Phi]\!] \setminus {}^*[\![\Phi]\!] \quad \text{и} \quad 2m \;\in\; {}^*[\![\Phi]\!] \setminus [\![\Phi]\!].$$

Теорема Поуэлла (без доказательства)

Для любого внутреннего предложения Φ,

$$\mathsf{IST} \vdash \Phi \iff \mathsf{ZFC} \vdash \Phi.$$

Иными словами, IST — консервативное расширения ZFC.

Некоторые примеры применения IST приведены в:

Nelson, E. Internal set theory: A new approach to nonstandard analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.* 3:3, 1165–1198, 1977.

Nelson, E. *Radically Elementary Probability Theory*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1987.

Анализ бесконечно малых в теории внутренних множеств

Инфинитезималы

Ключевые роли в дальнейшем будут играть классы

$$\begin{aligned} \mathbb{O} &:= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\exists^{\mathsf{St}} r \in \mathbb{R}\right)(|x| < r)\right\} \quad \text{и} \\ \mathbb{I} &:= \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\forall^{\mathsf{St}} r \in \mathbb{R}\right)(r > 0 \to |x| < r)\right\}. \end{aligned}$$

Элементы $\mathbb{O}$ называются ограниченными, а $\mathbb{I}$ — бесконечно малыми, или инфинитезималами. Очевидно, $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{O}$ и ${}^\circ\mathbb{R} \subseteq \mathbb{O}$.

Разумеется, $\mathbb{I} \cap {}^\circ\mathbb{R} = \{0\}$. Кроме того, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{O} \neq \varnothing$ по построению, т.е. бесконечные элементы существуют, причём среди них есть как положительные, так и отрицательные.

Утверждение

Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{O}$. Тогда $1/x \in \mathbb{I}$. □

Утверждение

i. $\mathbb{O}$ замкнуто относительно $+$, $-$ и $\cdot$.

ii. $\mathbb{I}$ замкнуто относительно $+$ и $-$. Кроме того,

$$x \cdot y \ \in \ \mathbb{I} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{I} \text{ и } y \in \mathbb{O}.$$

Доказательство.

$\boxed{\text{i}}$ Пусть $x, y \in \mathbb{O}$, т.е. $|x| < r$ и $|y| < s$ для некот. $r, s \in {}^\circ\mathbb{R}$. Тогда

$$|x \pm y| \ \leqslant \ |x| + |y| \ < \ r + s \quad \text{и} \quad |x \cdot y| \ \leqslant \ |x| \cdot |y| \ < \ r \cdot s.$$

Стало быть, $x \pm y \in \mathbb{O}$ и $x \cdot y \in \mathbb{O}$.

$\boxed{\text{ii}}$ Пусть $x, y \in \mathbb{I}$. Для любого положит. $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ мы имеем $|x| < r/2$ и $|y| < r/2$, а потому $|x \pm y| < r/2 + r/2 = r$. Значит, $x \pm y \in \mathbb{I}$.

...

Доказательство (продолжение).

Наконец, пусть $x \in \mathbb{I}$ и $y \in \mathbb{O}$. Зафиксируем $s \in {}^\circ\mathbb{R}$ такое, что $|y| < s$. Для любого положит. $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ верно $|x| < r/s$, а потому

$$|x \cdot y| \; < \; r/s \cdot s \; = \; r.$$

Значит, $x \cdot y \in \mathbb{I}$. □

Говорят, что x и y **бесконечно близки**, и пишут $x \approx y$, если $x - y \in \mathbb{I}$.

Утверждение

$\approx$ является отношением эквивалентности на $\mathbb{R}$. □

Замечание

Для любых $x, y \in \mathbb{R}$:

i. если $x \approx y$ и $x \in \mathbb{O}$, то $y \in \mathbb{O}$.

ii. если $x \approx y$ и $x \in \mathbb{I}$, то $y \in \mathbb{I}$.

Далее, $\approx$ согласовано с $+$, $-$ и $\cdot$ в определённом смысле:

Утверждение

Для любых $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

i. если $x \approx y$ и $u \approx v$, то $x + u \approx y + v$ и $-x \approx -y$;

ii. если $x \approx y$ и $u \approx v$, причём $\{x, y, u, v\} \subseteq \mathbb{O}$, то $x \cdot u \approx y \cdot v$.

Доказательство.

$\boxed{\text{i}}$ Пусть $x \approx y$ и $u \approx v$. Тогда

$$\begin{aligned} (x+u)-(y+v) &= (x-y)+(u-v) \in \mathbb{I} \\ \text{и} \quad (-x)-(-y) &= -(x-y) \in \mathbb{I}, \end{aligned}$$

т.е. $x+u \approx y+v$ и $-x \approx -y$.

$\boxed{\text{ii}}$ Пусть $x \approx y$ и $u \approx v$, причём $\{x, y, u, v\} \subseteq \mathbb{O}$. Тогда

$$\begin{aligned} (x \cdot u)-(y \cdot v) &= \\ (x \cdot u)+(x \cdot v)-(x \cdot v)-(y \cdot v) &= \\ x \cdot (u-v)+(x-y) \cdot v &\in \mathbb{I}, \end{aligned}$$

т.е. $x \cdot u \approx y \cdot v$. $\square$

Выделение стандартной части числа

Теорема

Для любого $x \in \mathbb{O}$ существует единственное $r \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ такое, что $x \approx r$.

Набросок доказательства.

Пусть $x \in \mathbb{O}$. Рассмотрим

$$Y \; := \; ^{*}\{s \in {}^{\circ}\mathbb{R} \mid s \leqslant x\}.$$

Обозначим $\sup Y$ через r. Очевидно, $r \in {}^{\circ}\mathbb{R}$. Более того, можно проверить, что $x \approx r$. $\square$

«Внешнее» определение сходимости

Продолжение следует...