Теория внутренних множеств — 4

Станислав Сперанский

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Дубна 2023

Выделение стандартной части числа (напоминание)

Теорема

Для любого $x \in \mathbb{O}$ существует единственное $r \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ такое, что $x \approx r$.

Набросок доказательства.

Пусть $x \in \mathbb{O}$. Рассмотрим

$$Y \ := \ {}^{*}\{s \in {}^{\circ}\mathbb{R} \mid s \leqslant x\}.$$

Обозначим $\sup Y$ через r. Очевидно, $r \in {}^{\circ}\mathbb{R}$. Более того, можно проверить, что $x \approx r$. $\square$

Значит, всякое $x \in \mathbb{O}$ однозначно представляется в виде

$$r + \varepsilon,$$

где $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ и $\varepsilon \in \mathbb{I}$; при этом r наз. стандартной частью x и обозначают $\mathrm{st}\,(x)$. Очевидно, $\mathrm{st}\,(r) = r$ для всех $r \in {}^\circ\mathbb{R}$.

Утверждение

i. st является «сюръекцией» из $\mathbb{O}$ на ${}^\circ\mathbb{R}$. (!)

ii. $\mathrm{st}^{-1}\,[\{0\}] = \mathbb{I}$, т.е. для любого $x \in \mathbb{O}$,

$$\mathrm{st}\,(x) \; = \; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \; \in \; \mathbb{I}.$$

iii. для любых $x, y \in \mathbb{O}$,

$$\mathrm{st}\,(x+y) \; = \; \mathrm{st}\,(x) + \mathrm{st}\,(y) \quad \text{и} \quad \mathrm{st}\,(x \cdot y) \; = \; \mathrm{st}\,(x) \cdot \mathrm{st}\,(y).$$

Доказательство.

i. Очевидно.

ii. Пусть $x \in \mathbb{O}$. Ясно, что $x \in \mathbb{I}$ равносильно $x \approx 0$, т.е. $\operatorname{st}(x) = 0$.

iii. Пусть $x, y \in \mathbb{O}$. Поскольку $\operatorname{st}(x) \approx x$ и $\operatorname{st}(y) \approx y$, мы получаем

$$\operatorname{st}(x) + \operatorname{st}(y) \approx x + y \quad \text{и} \quad \operatorname{st}(x) \cdot \operatorname{st}(y) \approx x \cdot y$$

(ввиду согласованности $\approx$ с $+$, $-$ и $\cdot$). Стало быть,

$$\operatorname{st}(x + y) = \operatorname{st}(x) + \operatorname{st}(y) \quad \text{и} \quad \operatorname{st}(x \cdot y) = \operatorname{st}(x) \cdot \operatorname{st}(y).$$

$\square$

Замечание

Разумеется, в $\mathbb{R}$ каждому $r \in {}^{\circ}\mathbb{R}$ соответствует

$$\begin{aligned} [r] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \approx r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{st}(x) = r\}, \end{aligned}$$

своего рода монада r, состоящая из чисел вида

$$r + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \in \mathbb{I}$. С помощью бесконечно близких можно развить, например, теорию предела (в духе Лейбница и Ньютона); понятия вроде «быть непрерывной в точке» при этом становятся более локальными.

Сходимость последовательностей

Утверждение

Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ и $s \in \mathbb{R}$ стандартны. Тогда с.у.э.:

i. f сходится к s в обычном смысле;

ii. для любого неограниченного $N \in \mathbb{N}$ верно $f(N) \approx s$.

Доказательство.

Остаётся в качестве упражнения. $\square$

Утверждение

Пусть ~~стандартные~~ $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ сходятся к соотв. $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Тогда

$$f_1 + f_2 \;:=\; \lambda n.[f_1(n) + f_2(n)] \quad \text{и} \quad f_1 \cdot f_2 \;:=\; \lambda n.[f_1(n) \cdot f_2(n)]$$

сходятся к соответственно $s_1 + s_2$ и $s_1 \cdot s_2$.

Доказательство.

Пусть $N \in \mathbb{N}$ неограничено. Тогда $f_1(N) \approx s_1$ и $f_2(N) \approx s_2$, откуда

$$f_1(N) + f_2(N) \;\approx\; s_1 + s_2 \quad \text{и} \quad f_1(N) \cdot f_2(N) \;\approx\; s_1 \cdot s_2$$

(здесь в случае умножения нужно учесть, что $f_1(N)$ и $f_2(N)$ ограничены, поскольку они бесконечно близки к s_1 и s_2). □

Сходимость

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r, s \in \mathbb{R}$ стандартны. Говорят, что f сходится в r к s, если для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \{r\}$ из $x \approx r$ следует $f(x) \approx s$.

Утверждение

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r, s \in \mathbb{R}$ стандартны. Тогда с.у.э.:

i. f сходится в r к s в смысле эпсилон-дельта определения;
ii. f сходится в r к s в смысле определения выше.

Доказательство.

Остаётся в качестве упражнения. □

Замечание

Разумеется, может случиться так, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не сходится в $r \in \mathbb{R}$ ни к какому $s \in \mathbb{R}$. С другой стороны, если f сходится в r к какому-н. s, то соответствующее s определяется однозначно равенством

$$s = \mathrm{st}\,(f\,(r+\varepsilon)),$$

где ε — произвольный ненулевой инфинитезимал; это s традиционно обозначают как $\lim_{x\to r} f\,(x)$.

Замечание

Требование $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ является излишним. Для частичных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ достаточно было бы потребовать следующего:

найдётся $x \in \operatorname{dom} f$ такое, что $x \approx r$ и $x \neq r$.

Тем не менее, для наглядности мы ограничимся рассмотрением всюду определенных функций.

Следствие (о непрерывности в точке)

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ стандартны. Тогда с.у.э.:

- i f непрерывна в r в обычном смысле;
- ii для любого $x \in \mathbb{R}$, если $x \approx r$, то $f(x) \approx f(r)$.

(Можно ещё переписать (ii) как «f сходится в r к $f(r)$».) $\square$

Пример применения: производные

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ стандартны. Под производной f в r пон-ся

$$f'(r) := \lim_{h \to 0} \frac{f(r+h) - f(r)}{h},$$

если этот предел существует. Значит, $f'(r) = s$ тогда и только тогда, когда для всякого ненулевого инфинитезимала dx,

$$\frac{f(r+dx) - f(r)}{dx} \approx s,$$

где для числителя дроби в левой части нередко используют обозначение df. В частности, если $f'(r)$ существует, то

$$f'(r) = \mathrm{st}(df/dx),$$

где dx — произвольный ненулевой инфинитезимал, причём df/dx — это результат непосредственно *деления*, а не предел.

Пример

Рассмотрим $f := \lambda x.\left[x^2\right]$. Пусть $r \in {}^{\circ}\mathbb{R}$. Ясно, что для всякого ненулевого инфинитезимала dx,

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{(r+dx)^2 - r^2}{dx} \\ &= \frac{r^2 + 2r\,(dx) + (dx)^2 - r^2}{dx} \\ &= \frac{2r\,(dx) + (dx)^2}{dx} \\ &= 2r + dx \;\approx\; 2r.\end{aligned}$$

Стало быть, $f'(r) = 2r$.

Пример

Рассмотрим $f := \lambda x.\left[x^3\right]$. Пусть $r \in {}^\circ\mathbb{R}$. Ясно, что для всякого ненулевого инфинитезимала dx,

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{(r+dx)^3 - r^3}{dx} \\
&= \frac{r^3 + 3r^2(dx) + 3r(dx)^2 + (dx)^3 - r^3}{dx} \\
&= \frac{3r^2(dx) + 3r(dx)^2 + (dx)^3}{dx} \\
&= 3r^2 + 3r(dx) + (dx)^2 \approx 3r^2.
\end{aligned}$$

Стало быть, $f'(r) = 3r^2$.

Пример

Попробуем обобщить предыдущие два примера. В силу параметризованной теоремы о рекурсии, для любого $m \in \mathbb{N}$ сущ. единственная

$$f_m \;:=\; \lambda^{\mathbb{R}} x.[x^m].$$

Значит, если m стандартно, то и f_m стандартна. Далее, как и в ZFC, для любого $m \in \mathbb{N}$ (не обязательно стандартного),

$$(x+y)^m \;=\; \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} y^k \;=\; x^m + m x^{m-1} y + \ldots + y^m.$$

Наконец, зафиксируем произвольное $n \in {}^\circ\mathbb{N}$. Тогда, как можно легко убедиться, для каждого $r \in {}^\circ\mathbb{R}$ мы имеем $f_n'(r) = n r^{n-1}$.

Утверждение

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ ~~станд~~. Предположим, что $f'(r)$ существует. Тогда f непрерывна в r.

Доказательство.

Рассмотрим произв. ненулевой инфинитезимал dx. По условию

$$\frac{f(r+dx)-f(r)}{dx} \;\approx\; f'(r).$$

Очевидно, в правой части стоит стандартное число; поэтому в левой — как минимум конечное. Домножив обе части на dx, получим

$$f(r+dx)-f(r) \;\approx\; f'(r)\cdot dx \;\in\; \mathbb{I}.$$

Стало быть, $f(r+dx) \approx f(r)$. □

Утверждение

Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{R}$ ~~станд~~. Предположим, что $f'(r)$ и $g'(f(r))$ существуют. Тогда $(f \circ g)'(r)$ существует и равно $g'(f(r)) \cdot f'(r)$.

Доказательство.

Рассмотрим произвольный ненулевой инфинитезимал dx. Положим

$$\begin{aligned} df &:= f(r+dx) - f(r) \\ d(f \circ g) &:= (f \circ g)(r+dx) - (f \circ g)(r) \\ &= g(f(r+dx)) - g(f(r)) \\ &= g(f(r) + df) - g(f(r)). \end{aligned}$$

Как мы уже знаем, f непрерывна в r; поэтому df — инфинитезимал.

...

Доказательство (продолжение).

Нужно показать, что

$$\frac{d\left(f \circ g\right)}{dx} \approx g'\left(f\left(r\right)\right) \cdot f'\left(r\right).$$

Возможны два случая.

- Пусть $df = 0$. Тогда $d\left(f \circ g\right) = 0$; кроме того, $f'\left(r\right) \approx df/dx = 0$, а значит, $f'\left(r\right) = 0$. В итоге

$$\frac{d\left(f \circ g\right)}{dx} = 0 = g'\left(f\left(r\right)\right) \cdot f'\left(r\right).$$

...

Доказательство (продолжение).

- Пусть $df \neq 0$. Тогда

$$\frac{d\,(f \circ g)}{df} = \frac{g\,(f\,(r) + df) - g\,(f\,(r))}{df} \approx g'\,(f\,(r)).$$

Стало быть,

$$\frac{d\,(f \circ g)}{dx} = \frac{d\,(f \circ g)}{df} \cdot \frac{df}{dx} \approx g'\,(f\,(r)) \cdot f'\,(r).$$

□

Заключительные комментарии

- Выше приведено лишь несколько простейших примеров применения метода бесконечно малых.
- На самом деле, применения бесконечно малых выходят далеко за пределы *элементарного анализа*. К примеру, метод успешно использовался в функциональном анализе и теории меры.
- Многие результаты математического анализа изначально были получены с помощью бесконечно малых, хотя, разумеется, сам метод в те времена был куда менее обоснован.