

Задачи к лекциям 1–2

1. Пусть последовательность Сомос-5 задана рекуррентным соотношением

$$s_{n+3}s_{n-2} = \tilde{\alpha}s_{n+2}s_{n-1} + \tilde{\beta}s_{n+1}s_n. \quad (1)$$

Проверьте, что в переменных $f_n = s_{n+1}s_{n-1}/s_n^2$ это соотношение записывается в виде

$$f_{n-1}f_n^2f_{n+1}^2f_{n+2} = \tilde{\alpha}f_n f_{n+1} + \tilde{\beta}.$$

Докажите, что следующие числа являются инвариантами последовательности Сомос-5:

$$I = I_n = f_{n-1}f_n f_{n+1} + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_{n-1}} + \frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}} \right) + \frac{\tilde{\beta}}{f_{n-1}f_n f_{n+1}},$$

$$J = J_n = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_{n-1}f_n} + \frac{1}{f_n f_{n+1}} \right) + \frac{\tilde{\beta}}{f_{n-1}f_n^2 f_{n+1}}.$$

Докажите также справедливость равенств

$$I = f_{n-1}f_n f_{n+1} + f_n f_{n+1} f_{n+2} + \tilde{\alpha} \left(\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n+1}} \right), \quad (2)$$

$$J = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} + f_{n+1}f_{n+2} + \frac{\tilde{\alpha}}{f_n f_{n+1}}. \quad (3)$$

2. С помощью каждой из формул (2), (3) докажите, что все элементы последовательности Сомос-(5) — целые числа.

3. Пусть m — натуральное число, и $\{s_n\}$ — это последовательность Сомос-(5). С помощью формул (2), (3) докажите, что остатки, которые элементы последовательности $\{s_n\}$ дают при делении на m , периодически повторяются.

4*. Докажите, что для любого решения s_n рекуррентного соотношения (1) подпоследовательности с чётными и нечётными номерами $s_n^* = s_{2n}$ и $s_n^* = s_{2n+1}$ удовлетворяют уравнению Сомос-4

$$s_{n+2}^* s_{n-2}^* = \alpha^* s_{n+1}^* s_{n-1}^* + \beta^* (s_n^*)^2, \quad (4)$$

в котором $\alpha^* = \tilde{\beta}^2$, $\beta^* = \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^3 + 2\tilde{\beta}^2 + \tilde{\alpha}\tilde{\beta}J)$.

5*. Докажите, что последовательность Сомос-5, задаваемая уравнением (1) и обладающая инвариантами I и J , будет последовательностью Сомос-4 тогда и только тогда, когда $I^2 = 4(\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}J)$.

6. Докажите, что умножив элементы последовательности Сомос-5 с чётными номерами на некоторое комплексное число, можно получить последовательность Сомос-4.