

ИНВАРИАНТЫ РАВНОСОСТАВЛЕННОСТИ В ГЕОМЕТРИИ И ДИНАМИКЕ

Аннотация. К аддитивным геометрическим инвариантам относятся площадь, объем, периметр (если правильно понимать аддитивность), эйлерова характеристика (она инвариантна в очень сильном смысле!), угловой дефект (играет роль в неевклидовой геометрии и оказывается мистическим образом связанным с эйлеровой характеристикой), и многие другие. В классической геометрии аддитивные инварианты используются для решения задач равносоставленности. Например, разрезав многоугольник на конечное число многоугольных кусков, можно из них сложить любой другой многоугольник той же площади (теорема Уоллеса–Бойяи–Гервина). При этом допускаются параллельные переносы и вращения кусков. Если же разрешить только параллельные переносы, а вращения запретить, то, кроме площади, есть еще бесконечное число инвариантов, сохраняющихся при замене фигуры на другую ей T -равносоставленную, т.е. равносоставленную с использованием только параллельных переносов, — эти инварианты ввели Хадвигер и Глур в 1951. Состояние дел с T -равносоставленностью на плоскости чем-то напоминает то, как выглядит равносоставленность в 3-мерном пространстве. За последнюю, кроме объема, отвечает так называемый *инвариант Дена* (тоже аддитивная величина!) — это знаменитое решение третьей проблемы Гильберта. Поскольку инвариант Дена принимает значения в бесконечномерном пространстве, он по сути содержит бесконечное число вещественных аддитивных инвариантов.

Аддитивные инварианты оказываются полезными в динамике — в задачах про перекладывания отрезков, многоугольников, многогранников. Например, можно разрезать отрезок на конечное число подотрезков, и сложить из этих кусков новый отрезок. Единственным ограничением служит то, что длины старого и нового отрезков должны совпадать. В этом смысле нединамическая задача тривиальна. Однако, если перекладывание отрезков рассматривать как динамическую систему, т.е. многократно итерировать эту операцию, то возникает много интересных вопросов. Например, вопрос о том, вернем ли мы когда-нибудь все точки на место, т.е. является ли перекладывание отрезков периодическим? Ответить на этот вопрос в некоторых случаях помогает динамический инвариант Са–Арну–Фати, удивительно похожий — внешне, по крайней мере — на инвариант Дена.

Совсем недавно выяснилось, что динамические аналоги инвариантов Хадвигера–Глура, одновременно являющиеся многомерными обобщениями инварианта Са–Арну–Фати, помогают изучать динамические свойства внешних бильярдов.

1. КОНЕЧНО АДДИТИВНЫЕ МЕРЫ

Допустим, что каждому выпуклому многоугольнику P на плоскости сопоставлено некоторое число $\mu(P)$ таким образом, что выполнено равенство

$$\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q) - \mu(P \cap Q)$$

всякий раз, когда $P, Q, P \cup Q$ одновременно являются выпуклыми многоугольниками (обратите внимание: $P \cap Q$ будет выпуклым многоугольником автоматически, если только P и Q были выпуклыми многоугольниками). При этом будем считать, что пустое множество \emptyset — выпуклый многоугольник, и $\mu(\emptyset) = 0$. В этом случае говорят, что задана *конечно аддитивная мера* μ на многоугольниках. Мы будем говорить просто *мера*, имея в виду конечно аддитивную меру, хотя обычно в теории меры говорят про так называемые счетно-аддитивные меры, удовлетворяющие более сильному условию по сравнению с приведенным выше. Ниже приведены конкретные примеры мер на многоугольниках.

Пример (Площадь). У каждого многоугольника есть *площадь*. Безусловно, площадь является конечно аддитивной мерой — это одно из основных свойств площади. Еще одно важное свойство состоит в том, что *вырожденный многоугольник*, не имеющий внутренней, то есть сводящийся к одному только отрезку или даже к точке, обязан иметь нулевую площадь. Комбинируя это свойство со свойством аддитивности, приходим к такому

утверждению: если выпуклый многоугольник P разрезан на несколько выпуклых многоугольников P_1, \dots, P_n , то площадь всего P равна сумме площадей всех частей:

$$\text{area}(P) = \text{area}(P_1) + \dots + \text{area}(P_n).$$

Свойства площади часто описывают аксиоматически, то есть перечисляют главные свойства площади (часто, без доказательства), а потом выводят все остальные свойства из этих главных. При таком подходе к аксиомам площади, кроме (1) аддитивности, следует отнести то, что (2) площадь любого многоугольника неотрицательна, и что (3) она не меняется при любых (собственных и несобственных) движениях плоскости.

Кстати, то, что площадь вырожденного многоугольника равна нулю, можно вывести из перечисленных выше аксиом площади (1) – (3). Этот вывод предоставляется читателю в качестве упражнения. Если мера равна нулю на всех вырожденных многоугольниках, то такая мера называется *простой*. Мы видели выше, что площадь — простая мера. Когда приходится работать с непростыми мерами, возникают всякого рода тонкости, связанные с рассмотрением граничных точек. Оговорим сразу же, что под многоугольниками имеются в виду замкнутые фигуры, если только не оговорено противное. То есть, вместе с внутренними точками многоугольника, в многоугольник входят также все точки всех сторон и, в частности, все вершины.

Пример (Периметр). Еще один пример меры на многоугольниках — *периметр*. Напомним, что периметром невырожденного выпуклого многоугольника называется сумма длин всех его сторон. Чтобы говорить о том, что периметр является мерой, его нужно доопределить на вырожденных многоугольниках. Конечно, если многоугольник выродился в точку, то нужно считать периметр равным нулю. Рассмотрим теперь вырожденный многоугольник, сводящийся к одному отрезку I . Обозначим через $|I|$ длину этого отрезка. Такой многоугольник следует рассматривать как бесконечно тонкую фигуру с двумя параллельными сторонами длины $|I|$ (и еще с несколькими сторонами нулевой длины). Периметр многоугольника I , стало быть, следует положить равным $2|I|$. Нетрудно проверить, что при таком определении периметр становится конечно аддитивной мерой.

Напомним, что многоугольник (не обязательно выпуклый) — это по определению объединение конечного числа выпуклых многоугольников. Можно показать, что любую меру на выпуклых многоугольниках можно продолжить до меры на всех многоугольниках, то есть функцию μ можно доопределить на невыпуклых многоугольниках таким образом, чтобы по-прежнему выполнялось свойство аддитивности

$$\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q) - \mu(P \cap Q),$$

в котором теперь P и Q — произвольные многоугольники. В частности, если P и Q не имеют вообще никаких общих точек, в том числе и граничных, то можно утверждать, что $\mu(P + Q) = \mu(P) + \mu(Q)$. При этом $P \cup Q$ — объединение двух независимых кусков; такое объединение никогда не бывает выпуклым многоугольником. Логические тонкости продолжения меры на невыпуклые многоугольники не стоит недооценивать, хотя мы их и не приводим. Также важно отдавать отчет в значении этой процедуры. Следующий пример призван это продемонстрировать.

Пример (Эйлерова характеристика). Положим $\chi(P) := 1$ для всякого непустого выпуклого многоугольника P . Это, как нетрудно проверить, мера χ на многоугольниках. Она называется *эйлеровой характеристикой*. Чтобы оправдать такое громкое название для, казалось бы, совершенно тавтологической меры, заметим, что эйлерова характеристика продолжается, согласно вышесказанному, на любые, не обязательно выпуклые, многоугольники. И тут уже поведение этой меры совсем не является тривиальным. Например, можно взять большой многоугольник и вырезать из него n многоугольных дырок, то есть взять теоретико-множественную разность X большого многоугольника и объединения

нескольких непересекающихся маленьких многоугольников, содержащихся в X . Пользуясь аддитивностью эйлеровой характеристики, легко установить, что для описанной только что фигуры $\chi(X) = 1 - n$. Концепция эйлеровой характеристики восходит к Эйлеру (1707—1783), российскому математику швейцарского происхождения.¹

Ниже — несколько задач на эйлерову характеристику.

Задача. Рассмотрим невырожденный выпуклый многоугольник P и определим его *внутренность* $\text{Int}(P)$ как результат удаления из P всех сторон, включая вершины. Другими словами, внутренность состоит из тех точек, которые входят в многоугольник вместе с какой-то целой своей окрестностью (шаром какого-то положительного радиуса с центром в данной точке) — кстати, это определение применимо не только к многоугольникам. Внутренность любого невырожденного выпуклого многоугольника имеет эйлерову характеристику 1 — докажите. А если взять невырожденный отрезок и выкинуть из него концы, то полученный интервал будет иметь эйлерову характеристику -1 .

Задача. Любой многоугольник, не обязательно выпуклый, можно представить в виде объединения непересекающихся частей так, что каждая часть — либо внутренность невырожденного многоугольника (такие части называются *2-клетками*), либо непустой интервал (*1-клетка*), либо точка (*0-клетка*). Части совсем не должны пересекаться, в том числе не должны иметь общих граничных точек. Докажите, что такое представление возможно. Проверьте, что эйлерову характеристику многоугольника можно посчитать как $f_0 - f_1 + f_2$, где f_k — это число k -клеток ($k = 0, 1, 2$).

Задача. Пусть X — объединение всех сторон и всех диагоналей правильного n -угольника. Вычислите $\chi(X)$.

Из приведенных примеров мер на многоугольниках простой мерой является мера площади, а вот периметр и эйлерова характеристика простыми не являются.

Терминологическое замечание и предупреждение: в дальнейшем стороны многоугольника будут часто называться *ребрами*. Это делается по двум причинам. Во-первых, многоугольники — частный случай многогранников, а их стороны в самом деле с точки зрения теории многогранников являются ребрами. Во-вторых, слово «сторона» будет использоваться в другом смысле, а именно, мы будем говорить об объектах, скажем, находящихся по ту или другую сторону от прямой. Это соответствует житейской терминологии (часто говорят «по правую сторону» или «по левую сторону»), а с формальной математической точки зрения выбор стороны относительно прямой соответствует выбору одной из двух полуплоскостей, на которые прямая делит плоскость.

1.1. Меры в общем контексте. Мы определили (конечно аддитивные) меры на плоских выпуклых многоугольниках. Теперь обсудим понятие меры в более широком контексте.

Определение (Мера). Пусть X — множество, а Ω — некоторая совокупность подмножеств множества X , содержащая пустое множество ($\emptyset \in \Omega$). *Конечно аддитивной мерой* на Ω называется такая функция $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q) - \mu(P \cap Q)$$

для любых $P, Q \in \Omega$, таких, что $P \cap Q, P \cup Q \in \Omega$.

¹Эйлер родился в Базеле, но более половины жизни провел в России. Автор более 850 работ, из которых около 20 учебников и монографий. По всей видимости, Эйлера следует считать рекордсменом среди математиков по суммарному объему публикаций, притом что (в отличие, скажем, от Эрдеша — рекордсмена по числу статей) работы Эйлера были написаны без соавторов, несмотря на частичную, а в конце жизни и полную, слепоту. Существенное время Эйлер провел в Пруссии (Берлине и Потсдаме) при дворе Фридриха Великого, но в Петербурге все же в два раза больше.

Обозначим через $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ совокупность всех выпуклых многоугольников на плоскости. Тогда меры на многоугольниках, обсуждавшиеся ранее — это меры на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Аналогично, можно рассмотреть $\mathcal{P}(\mathbb{R}^1)$ — совокупность всех отрезков на прямой. Имеется несколько важных примеров мер на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^1)$.

Пример (Длина). Для каждого отрезка I на прямой положим $\text{Len}(I) := |I|$. Таким образом определенная функция Len является мерой на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^1)$. Эта мера называется *мерой длины*. Длина для множеств на прямой играет ту же роль, которую площадь играет для множеств на плоскости. Мера длины тоже проста — в том смысле, что любой вырожденный (сводящийся к точке) отрезок имеет нулевую длину.

Следующий пример менее стандартен.

Пример. Зафиксируем произвольную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Каждому отрезку $[a; b]$ сопоставим число $f(b) - f(a)$. Таким образом получается мера на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^1)$. Эта мера, в отличие от ранее рассмотренных, может принимать как положительные, так и отрицательные значения, в зависимости от поведения функции f . Отметим также, что для определения меры не нужны никакие свойства функции f , в частности, эта функция даже не обязана быть непрерывной.

Мы обсудили меры на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^1)$ и $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$. Более общим образом, обозначим через $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ множество всех выпуклых многогранников в \mathbb{R}^d . В этом месте, возможно, стоит напомнить некоторые определения. Пространство \mathbb{R}^d размерности d — это обобщение прямой, плоскости, обычного трехмерного пространства. Если на плоскости зафиксировать систему координат, то точки плоскости будут однозначно задаваться парами действительных чисел, а именно, парами координат. Точно так же, точка в пространстве задается тройкой координат, а точка на прямой — всего одной координатой, то есть одним действительным числом. Можно теперь рассмотреть упорядоченные наборы из d действительных чисел и назвать эти наборы *точками* пространства \mathbb{R}^d . Сами входящие в набор действительные числа называются *координатами* точки. Пространство \mathbb{R}^d — это множество всех таким образом определенных точек, то есть множество всевозможных наборов из d координат. Две точки $x, y \in \mathbb{R}^d$ определяют *отрезок* $[x; y]$. А именно, если

$$x = (x_1, \dots, x_d), \quad y = (y_1, \dots, y_d),$$

то множество $[x; y]$ состоит из всех таких точек $z = (z_1, \dots, z_d)$, что $x_i \leq z_i \leq y_i$ для всех $i = 1, \dots, d$, и при этом отношение, в котором координата z_i делит отрезок $[x_i; y_i]$, не зависит от i . Иными словами, если t изменяется от 0 до 1, то точка

$$(1 - t)x + ty := ((1 - t)x_1 + ty_1, \dots, (1 - t)x_d + ty_d)$$

пробегают все точки отрезка $[x; y]$. Подмножество $P \subset \mathbb{R}^d$ *выпукло*, если выполнено условие

$$(\forall x, y \in P) \quad [x; y] \subset P.$$

Нетрудно видеть, что пересечение любого семейства выпуклых множеств выпукло. В частности, для всякого множества $A \subset \mathbb{R}^d$ можно рассмотреть так называемую *выпуклую оболочку* множества A , то есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A . Определим *выпуклый многогранник* в \mathbb{R}^d как выпуклую оболочку конечного набора точек. Через $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ обозначена совокупность всех выпуклых многогранников в \mathbb{R}^d .

Пример (Объем в \mathbb{R}^3). Любому выпуклому многограннику в \mathbb{R}^3 можно сопоставить его *объем*. Это сопоставление определяет меру на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$, а именно, *меру объема*. Вообще говоря, чтобы объем был однозначно определен, требуется зафиксировать единицу объема. Конечно, это же замечание применимо в той же степени к мере площади и мере длины. Обычное соглашение состоит в том, что единичный куб

$$I^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

имеет объем 1. Аналогичные соглашения вводятся на плоскости и на прямой.

Понятие объема можно распространить на любую размерность. Мы, впрочем, отложим соответствующее обсуждение до лучших времен. А сейчас приведем еще два примера. Эти примеры относятся не к многогранникам, а к абстрактному контексту.

Пример. Пусть X — произвольное множество, а Ω — совокупность всех конечных подмножеств в X . Можно определить меру card , сопоставляющую каждому множеству из Ω число элементов в этом множестве.

Пример (Дельта мера). Возьмем произвольное множество X , и определим Ω как совокупность всех подмножеств в X . Зафиксируем также произвольный элемент $a \in X$. Для всякого $P \subset \Omega$, положим $\delta_a(P) = 1$ если $a \in P$, а иначе положим $\delta_a(P) = 0$. Нетрудно проверить, что δ_a — это мера на Ω . Эту меру называют *дельта мерой*, сконцентрированной в точке a .

Важное наблюдение про меры состоит в следующем. Пусть μ_1 и μ_2 — две меры на Ω . Зафиксируем также два действительных числа c_1 и c_2 . Определим новую функцию $\nu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$ формулой

$$\nu(P) := c_1\mu_1(P) + c_2\mu_2(P), \quad \forall P \in \Omega.$$

Новая функция тоже будет мерой. Таким образом, меры можно складывать и умножать на действительные числа. В этом смысле говорят, что меры на Ω образуют *векторное пространство*.

Рассмотрим на плоскости несколько точек a_1, \dots, a_n и несколько многоугольников Q_1, \dots, Q_k . Зафиксируем также действительные числа m_1, \dots, m_n и ρ_1, \dots, ρ_k . Можно представить себе, что точки a_i наделены точечными массами m_i , а каждый из многоугольников Q_j несет массу, равномерно распределенную с плотностью ρ_j . Положим

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^n m_i \delta_{a_i}(P) + \sum_{j=1}^k \rho_j \text{area}(P \cap Q_j).$$

Это мера на многоугольниках. Значение $\mu(P)$ этой меры на многоугольнике P можно представить себе интуитивно как общую массу, заключенную в P . Учитываются при этом как точечные массы, так и массы, размазанные по многоугольникам Q_j .

1.2. Аддитивные функции. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *аддитивной*, если она удовлетворяет следующему *функциональному уравнению Коши–Гамеля*:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Для всякой меры μ на Ω и всякой аддитивной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, функция $f \circ \mu$, определенная формулой $f \circ \mu(P) := f(\mu(P))$ для всякого $P \in \Omega$, является тоже мерой. Таким образом, имея достаточный запас аддитивных функций, мы сможем из каждой меры получить множество других мер. Подобная операция может выглядеть тавтологической, но она будет играть важную роль в задачах равноставленности.

Обсудим теперь, какие бывают аддитивные функции. Явные примеры привести несложно: для всякой константы c можно взять функцию $f(x) = cx$. Привести какие-либо еще явные примеры оказывается затруднительным. Тем не менее, можно доказать, что такие примеры существуют (об этом ниже).

Если f — аддитивная функция, то нетрудно доказать по индукции, что

$$f(x_1 + \dots + x_n) = f(x_1) + \dots + f(x_n), \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

то есть что свойство аддитивности переносится на произвольное число слагаемых. Теперь предположим, что все слагаемые x_i равны одному и тому же числу x . В этом случае получаем в качестве частного случая выписанной формулы, что $f(nx) = nf(x)$, то есть положительные целые множители можно выносить за знак функции f . А теперь можно взять произвольное число $y \in \mathbb{R}$ и произвольное целое положительное число m . Положив

$x = y/m$ в формуле $f(mx) = mf(x)$, получим, что $f(y/m) = f(y)/m$. Значит, не только положительные целые числители, но и положительные целые знаменатели можно выносить за знак функции f . Наконец, можно выносить знак минус, так как из

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

вытекает $f(0) = 0$, а из

$$0 = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

вытекает $f(-x) = -f(x)$. Следствием обнаруженных свойств является то, что $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для любого рационального λ , положительного, отрицательного или нулевого. Таким образом, аддитивная функция является *линейной функцией над \mathbb{Q}* в следующем смысле.

Определение (Линейная функция над \mathbb{Q}). Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *линейной над \mathbb{Q}* , если выполнено тождество

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ и любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$.

Мы видим, что аддитивные функции и линейные над \mathbb{Q} функции на \mathbb{R} — это то же самое. Как сами понятия (аддитивной или \mathbb{Q} -линейной функции), так и их логическая эквивалентность, сохраняются при замене множества \mathbb{R} некоторыми специальными подмножествами, называемыми \mathbb{Q} -векторными подпространствами.

Определение (\mathbb{Q} -векторные подпространства в \mathbb{R}). Подмножество $V \subset \mathbb{R}$ называется *\mathbb{Q} -векторным подпространством*, если выполнено следующее условие:

$$\forall x_1, \dots, x_n \in V, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}, \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in V.$$

В этом условии достаточно предположить, что $n = 2$ (общий случай легко вывести по индукции из этого частного). Понятие \mathbb{Q} -линейной (т.е. линейной над \mathbb{Q}) функции без каких-либо изменений переносится на случай любого \mathbb{Q} -линейного подпространства в \mathbb{R} .

Очевидным образом эквивалентное определение \mathbb{Q} -векторного подпространства $V \subset \mathbb{R}$ состоит в том, что V *замкнуто* относительно двух операций, а именно, операции сложения и операции умножения на данное постоянное рациональное число. Иными словами, если $x, y \in V$, то также $x + y \in V$, а если $x \in V$ и $\lambda \in \mathbb{Q}$, то $\lambda x \in V$. Конечно, имеет смысл также говорить об аддитивных функциях $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Доказательство того, что всякая такая функция является линейной над \mathbb{Q} , дословно повторяет уже приведенное выше рассуждение. Ниже — конкретный пример \mathbb{Q} -векторного подпространства V и \mathbb{Q} -линейной функции на нем.

Пример. Рассмотрим множество всех действительных чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Обозначим это множество через V . Из иррациональности числа $\sqrt{2}$ немедленно вытекает, что $a + b\sqrt{2}$ может быть равно нулю только в том случае, когда $a = b = 0$. Более общим образом, для совпадения чисел $a + b\sqrt{2}$ и $a' + b'\sqrt{2}$ необходимо и достаточно совпадения их координат, то есть условия $a = a'$ и $b = b'$. Таким образом, можно отождествить элементы множества V с парами (a, b) , причем сложению элементов множества V как действительных чисел соответствует покомпонентное сложение пар, то есть сумма двух чисел, представленных парами (a, b) и (a', b') , представляется парой $(a + a', b + b')$. Аналогично, умножение элемента V на данное рациональное число λ выражается в терминах пар как переход от (a, b) к паре $(\lambda a, \lambda b)$. Зафиксируем два произвольных действительных числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и рассмотрим теперь функцию $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$f(a + b\sqrt{2}) := \alpha a + \beta b.$$

Нетрудно проверить, что так определенная функция является линейной над \mathbb{Q} . Обратите внимание: эта функция зависит от двух параметров и, вообще говоря, не сводится к умножению на константу. В обратную сторону: если $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная над \mathbb{Q} функция,

то ее можно задать выписанной выше формулой для подходящих $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а именно, для $\alpha = f(1)$ и $\beta = f(\sqrt{2})$. Действительно, в силу линейности над \mathbb{Q} , имеем

$$f(a + b\sqrt{2}) = af(1) + bf(\sqrt{2}) = \alpha a + \beta b.$$

Говорят, что рассмотренное выше пространство V *двумерно* в том смысле, что его элементы отождествляются с парами рациональных чисел, причем так, что сложение элементов из V и умножение их на рациональные числа отвечают одноименным покомпонентным операциям над парами. Аналогичным образом, можно привести примеры \mathbb{Q} -векторных подпространств в \mathbb{R} , которые отождествляются с тройками, четверками и т.д., рациональных чисел, то есть являются, как говорят, *трехмерными*, *четырёхмерными* и т.д., пространствами над \mathbb{Q} . Кстати говоря, бывают и бесконечномерные \mathbb{Q} -векторные подпространства в \mathbb{R} . Например, таковым является все \mathbb{R} .

Определение (Базис). Пусть $V \subset \mathbb{R}$ — некоторое \mathbb{Q} -векторное подпространство в \mathbb{R} . *Базисом* в V называется такое подмножество $B \subset V$, что любой элемент $x \neq 0$ из V можно единственным образом записать в виде

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, \quad e_1, \dots, e_n \in B, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},$$

с точностью до перестановки слагаемых (предполагается, что базисные элементы e_1, \dots, e_n попарно различны).

Например, в рассмотренном выше примере $V = \{a + b\sqrt{2}\}$ базисом будет множество из двух элементов $1, \sqrt{2}$. Базис может быть конечным или бесконечным. Однако, даже если сам базис состоит из бесконечного числа элементов, допускаются только конечные суммы в разложении любого элемента из V , то есть, в формуле из определения базиса, число n обязано всегда быть конечным, хотя оно может зависеть от x .

Теорема. *Во всяком \mathbb{Q} -векторном подпространстве пространства \mathbb{R} найдется базис.*

Теорема принадлежит Гамелю, и соответствующий базис иногда называют *базисом Гамеля*. Эта теорема несложная, но она требует некоторой техники из теории множеств, а именно, обычно используется лемма Цорна или какое-нибудь другое стандартное следствие аксиомы выбора. В связи с этим, доказательство неконструктивно, то есть оно не приводит ни к какому явно построенному базису. Мы это доказательство опустим, но советуем заинтересованному читателю его восстановить, предварительно ознакомившись с леммой Цорна. Грубо говоря, базис может быть получен следующей процедурой (эта «процедура», однако, бесконечная и даже несчетная, и включает в себя произвольные выборы на каждом шаге). Начнем с любого ненулевого числа, например, с 1. Добавим к нему другое число, скажем, $\sqrt{2}$, не являющееся рационально кратным первому. Получим множество из двух чисел $\{1, \sqrt{2}\}$. Затем добавим к полученному множеству третье число, скажем, $\sqrt{3}$, не являющееся рациональной линейной комбинацией первых двух, то есть не представимое в виде $a + b\sqrt{2}$ при $a, b \in \mathbb{Q}$. И так далее. Эта процедура, как можно показать, не может закончиться ни на каком конечном шаге. Однако это не должно вас смущать. Делайте бесконечное число шагов и продолжайте, пока не получите базис.

Предложение. *Пусть $V \subset \mathbb{R}$ — векторное подпространство над \mathbb{Q} с базисом B . Всякая функция $\phi : B \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно продолжается до \mathbb{Q} -линейной функции на V .*

Доказательство. Докажем сначала единственность продолжения. Пусть $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная над \mathbb{Q} функция, ограничение которой на B совпадает с ϕ . Тогда, в силу линейности,

$$f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 \phi(e_1) + \dots + \lambda_n \phi(e_n)$$

для любых $e_1, \dots, e_n \in B$ и любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$. Однако любой элемент пространства V можно записать как $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Значит, все значения функции f однозначно восстанавливаются по функции ϕ . И наоборот, выписанная выше формула позволяет определить

функцию f по функции ϕ ; линейность так определенной функции проверяется непосредственно. \square

Вернемся к частному случаю $V = \mathbb{R}$. Согласно общей теореме, в V имеется базис B как в векторном подпространстве над \mathbb{Q} . Этот базис состоит из бесконечного, даже из несчетного, числа элементов. Поэтому линейных функций на V очень много — их столько же, сколько произвольных функций на B , то есть еще больше, чем элементов в B . С другой стороны, все эти функции обладают весьма патологическими свойствами, как будет видно из решения приведенной ниже задачи.

Задача. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — аддитивная функция. Докажите, что $f(x) = ax$ для постоянного числа $a \in \mathbb{R}$ (это число может быть найдено как $f(1)$), если f удовлетворяет хотя бы одному из перечисленных ниже свойств:

- (1) функция f непрерывна;
- (2) функция f монотонна;
- (3) значения $f(x)$ имеют один и тот же знак для всех $x > 0$;
- (4) для некоторых непустых открытых интервалов $I, J \subset \mathbb{R}$, имеем $f(x) \notin J$ при $x \in I$.

Как видно из последнего пункта задачи, если f не записывается формулой $f(x) = ax$, то точки графика функции f найдутся в каждом непустом открытом прямоугольнике на плоскости, стороны которого параллельны осям координат. Это означает, что рисовать график на компьютере бесполезно. Обычная процедура состоит в том, что тот или иной пиксель закрашивается, скажем, черным, если в представляемом этим пикселем квадрате есть точки графика. При таком подходе все пиксели окажутся закрашенными, то есть нарисованный компьютером график невозможно будет отличить от всей плоскости. А в то же время, разумеется, на каждой вертикальной прямой может быть не более одной точки графика.

1.3. Угловой дефект. В евклидовой планиметрии сумма трех углов любого треугольника равна π , то есть угловой мере развернутого угла. Но это только для евклидовой плоскости. Допустим теперь, что плоскость слегка помяли. Конечно, если Вы представите себе лист бумаги — сначала ровный, а потом мятый — то так не появится никакой разницы во внутренней геометрии. Поэтому нужно себе представлять не лист бумаги, а что-то эластичное, например, лист резины или поверхность воздушного шарика. На такой поверхности можно, например, изменить длину одной из сторон треугольника, не меняя длин двух других сторон. Или даже сохранить длины всех сторон, а поменять только углы. Даже при таком изменении некоторые геометрические свойства сохраняются, во всяком случае пока изменения достаточно малы. Скажем, на слегка искривленной поверхности все еще можно говорить про «прямые», имея в виду линии, осуществляющие кратчайшее расстояние. Через пару точек по-прежнему можно провести прямую, и только одну. Все еще можно измерять углы между парами лучей. И вообще, можно нарисовать любую картинку из школьной планиметрии, состоящую из отрезков, дуг окружностей и проч. Эта картинка будет выглядеть почти так же на искривленной плоскости. Допустим, искривления настолько незначительные, что их нельзя увидеть невооруженным глазом — в частности, нельзя разобрать на картинке — но можно измерить точным (с большим числом знаков после запятой) вычислением тех или иных геометрических величин.

В этом смысле можно нарисовать треугольник и задаться вопросом о том, насколько сильно данный треугольник отличается от евклидова, например, насколько сильно сумма его углов отличается от π . Для треугольника T с углами α, β, γ величина

$$\delta(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

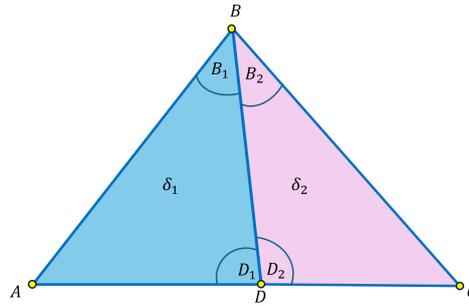


РИС. 1. Аддитивность углового дефекта. Углы двух треугольников при вершине D составляют вместе развернутый угол, откуда вытекает свойство $\delta = \delta_1 + \delta_2$.

называется *угловым дефектом* треугольника T . К.Ф. Гауссу² пришла мысль померить угловой дефект реального треугольника, образованного высшими точками в Гамбурге, Ганновере и Бремене. Если бы удалось обнаружить значимое отличие от нуля, то тем самым была бы установлена неевклидовость нашего реального пространства. К сожалению, эксперимент дал отрицательный результат — в пределах допустимой погрешности измерений, пространство оказалось евклидовым.

Предположим теперь, что треугольник T разбит на два треугольника, скажем, T_1 и T_2 , некоторой прямой, проходящей через вершину треугольника T . См. рис. 1, на котором треугольник T изображен как треугольник с вершинами A, B, C , а разделительная прямая проходит через вершину B и еще через некоторую точку D на стороне AC . Дефекты треугольников T_1 и T_2 обозначены через δ_1 и δ_2 , соответственно. Если $\delta := \delta(T)$, то имеет место равенство $\delta = \delta_1 + \delta_2$, что свидетельствует об аддитивности дефекта в частном случае. Равенство $\delta = \delta_1 + \delta_2$ связано с тем, что в треугольниках T_1, T_2 углы при вершине D составляют вместе развернутый угол, то есть дают в сумме π . Определим теперь угловой дефект любого выпуклого многоугольника.

Определение (Угловой дефект многоугольника). Пусть P — выпуклый n -угольник. *Угловым дефектом* $\delta(P)$ многоугольника P называется величина $\Sigma - (n-2)\pi$, где Σ — сумма углов многоугольника P , а $(n-2)\pi$ — то значение, которое сумма углов должна принимать в евклидовой планиметрии. Таким образом, угловой дефект многоугольника измеряет его неевклидовость, то есть отличие от евклидова многоугольника.

Говоря о выпуклых многоугольниках, мы по-прежнему считаем, что они выглядят так же, как на евклидовой плоскости, и только очень точные измерения могут выявить отклонения от евклидовой геометрии. Любой выпуклый многоугольник можно разрезать диагоналями на треугольники. Из определения непосредственно вытекает, что (угловой) дефект многоугольника равен сумме дефектов составляющих его треугольников. Это свидетельство в пользу аддитивности дефекта, хотя, конечно, еще не полное доказательство этой аддитивности. Впрочем, и полное доказательство не составляет труда.

Теорема. *Угловой дефект — это мера на выпуклых многоугольниках.*

Доказательство. Рассмотрим два выпуклых многоугольника P и Q , такие, что $P \cup Q$ — тоже выпуклый многоугольник. Допустим, что у P имеется всего n вершин, n_i из которых лежат в Q , а оставшиеся $n_o = n - n_i$ — вне Q . Аналогично, обозначим общее число вершин многоугольника Q через m , а число тех из них, которые лежат в P — через m_i ; тогда

²Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — величайший математик первой половины XIX века. Родом из Брауншвейга, профессор астрономии и директор обсерватории в Гёттингене. Гимназический учитель Гаусса, Бартельс, позднее также учил математике Лобачевского. В 1820 году Гауссу поручили реализовать геодезическую съёмку королевства Ганновер. Эта деятельность привела как к разработке новых вычислительных методов (триангуляция поверхностей, метод наименьших квадратов), так и к концептуальному прорыву в геометрии поверхностей — понятию кривизны.

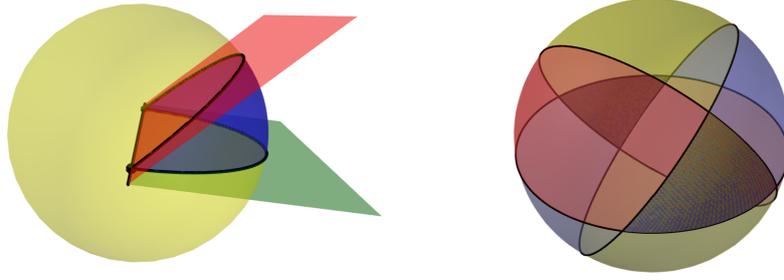


РИС. 2. Слева: двуугольник на сфере. Справа: сферический треугольник и шесть соответствующих долек. Эти дольки покрывают всю сферу, причем сам треугольник Δ , а также антиподальный ему треугольник Δ^* , покрыты трижды.

$m_o = m - m_i$ вершин многоугольника Q лежат вне P . Сумму углов многоугольника P по всем вершинам обозначим через $\Sigma(P)$, а по лежащим в Q вершинам — через $\Sigma_i(P)$; тогда $\Sigma_o(P) := \Sigma(P) - \Sigma_i(P)$ обозначает сумму углов многоугольника P при вершинах вне Q . Точно такие же обозначения мы введем для Q . Предположим для начала, что у P и Q нет общих вершин. Дефекты выражаются следующими формулами:

$$\delta(P) = (\Sigma_i(P) - n_i\pi) + (\Sigma_o(P) - (n_o - 2)\pi), \quad \delta(Q) = (\Sigma_i(Q) - (m_i - 2)\pi) + (\Sigma_o(Q) - m_o\pi).$$

Если сложить эти два выражения и подходящим образом сгруппировать члены, то мы получим, в одной группе, $\Sigma_i(P) + \Sigma_i(Q) - (n_i + m_i - 2)\pi$, что совпадает с дефектом пересечения $P \cap Q$, а в другой группе $\Sigma_o(P) + \Sigma_o(Q) - (n_o + m_o - 2)\pi$, что совпадает с дефектом объединения $P \cup Q$. Тот случай, когда у P и Q есть общие вершины, остается в качестве упражнения. Этот случай обобщает уже разобранный ситуацию, в которой треугольник разбивается на два треугольника. \square

1.4. Кривизна. Понятие дефекта осмысленно в сферической геометрии. Все сказанное выше справедливо, если мы ограничимся рассмотрением малых участков сферы или, наоборот, будем рассматривать участки стандартного масштаба на сфере очень большого радиуса. Но даже и на таких участках, размер которых сопоставим с размером всей сферы, понятиям выпуклого многоугольника и дефекта можно придать точный смысл. «Прямыми» на сфере следует считать дуги больших окружностей, то есть таких окружностей на сфере, центр которых совпадает с центром сферы. Мы хотим на примере сферической геометрии выяснить связь между площадью и дефектом. Для этого нужно посчитать площадь сферического многоугольника.

Начнем со случая *двуугольника*, то есть многоугольника с двумя вершинами. Это такая долька на сфере, ограниченная двумя прямыми, пересекающимися в двух диаметрально противоположных (=антиподальных) точках, см. рис. 2 слева. Здесь нарушается свойство двух прямых иметь не более одной точки пересечения, но это потому, что диаметрально противоположные точки сферы расположены далеко друг от друга. А маленьких двуугольников, конечно, не бывает. С точностью до вращения сферы, долька характеризуется только одним параметром — углом при вершине (углы при двух разных вершинах совпадают по величине). Площадь дольки с углом α , как нетрудно видеть, пропорциональна величине α . В этом можно убедиться, например, заметив, что площадь дольки является аддитивной функцией $S(\alpha)$ от α , принимающей положительные значения для положительных α . Точнее говоря, функция определена не для всех значений α , а только для значений в интервале от 0 до π , но ее можно доопределить на всю прямую как аддитивную функцию с указанным свойством. Остается только найти коэффициент пропорциональности. Если $\alpha = \pi$, то долька становится полусферой. Вспомним, что площадь всей сферы радиуса R равна $4\pi R^2$, а площадь полусферы, соответственно, $2\pi R^2$. Следовательно, коэффициент пропорциональности равен $2R^2$, то есть $S(\alpha) = 2R^2\alpha$.

Теперь рассмотрим сферический треугольник Δ с углами α, β, γ . Прямые, продолжающие стороны треугольника Δ , определяют шесть двуугольников: два с углом α , два с углом β и два с углом γ . Например, две прямые, являющиеся продолжениями сторон треугольника Δ , сходящихся в вершине α , образуют два двуугольника с углом α , и так же для любой другой вершины. Шесть упомянутых двуугольников покрывают всю сферу, причем сам многоугольник Δ , как и антиподальный к нему треугольник Δ^* , оказываются покрыты трижды, а остальные точки сферы — только один раз, если не считать продолжения сторон треугольника Δ . Итак, получаем формулу

$$2(S(\alpha) + S(\beta) + S(\gamma)) = 4\pi R^2 + 2 \text{area}(\Delta) + 2 \text{area}(\Delta^*).$$

Учитывая полученное выше выражение для $S(\alpha)$, а также то, что антиподальные треугольники Δ и Δ^* имеют одинаковую площадь, получаем, что площадь треугольника Δ выражается формулой $R^2\delta(\Delta)$. Таким образом, дефект треугольника пропорционален площади с коэффициентом пропорциональности R^{-2} . Пользуясь аддитивностью площади и дефекта, это утверждение нетрудно распространить на произвольные сферические выпуклые многоугольники. Итого, мы доказали следующий результат.

Теорема. Дефект выпуклого многоугольника на сфере радиуса R пропорционален площади этого многоугольника с коэффициентом пропорциональности R^{-2} .

Указанный коэффициент пропорциональности называют также *кривизной* сферы. Кривизна сферы положительна, и она тем меньше, чем больше радиус сферы.

Пример геометрии отрицательной кривизны доставляет так называемая *гиперболическая геометрия*, или *геометрия Лобачевского*. Изначально она возникла как абстрактная система геометрических утверждений, в основании которых лежат привычные аксиомы евклидовой геометрии, за исключением аксиомы о параллельных. А именно, в гиперболической геометрии через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести не одну, а много прямых, не пересекающихся с данной. Удивительно, что из этого, казалось бы, отрицательного свойства можно вывести много не только качественных, но и количественных заключений. Лобачевский³ развил гиперболическую геометрию настолько далеко, что получил тригонометрические тождества в этой геометрии, а также смог, при помощи гиперболических методов, найти в явном виде некоторые определенные интегралы. Мы так глубоко погружаться не будем, а ограничимся несколькими поверхностными замечаниями.

В каком-то смысле плоскость Лобачевского можно воспринимать как сферу мнимого радиуса (такое представление было уже у самого Лобачевского). Если, скажем, в формулах сферической геометрии радиус R заменить на iR , то полученные формулы во многих случаях будут иметь смысл; они будут выражать истинные факты гиперболической геометрии. Например, кривизна превратится в отрицательную величину $-R^{-2}$. Дефект каждого многоугольника на гиперболической плоскости отрицателен, и он тем больше, чем больше сам многоугольник. Отсюда, кстати, вытекает забавное наблюдение. Поскольку дефект треугольника не может быть больше чем π (иначе углы этого треугольника были бы отрицательными), площадь треугольника не может быть сколь угодно большой. Иначе говоря, в геометрии Лобачевского, площадь любого, сколь угодно большого, треугольника не может превысить некоторой вполне определенной величины, а может только приближаться к этой величине снизу.

³Николай Иванович Лобачевский (1792—1856), выдающийся российский геометр, профессор и ректор Казанского университета. Руководил университетом в тяжелые времена — времена реакции, когда из высших учебных заведений изгонялись иностранцы и насаждалось благочестие. Казанский университет оказался не только перед угрозой закрытия по решению «сверху», еще пришлось пережить пожар и суровую эпидемию холеры. Лобачевский не только сохранил университет, но и вывел его на новый уровень. Однако его административные заслуги были признаны современниками не больше, чем научные.

Рассмотрим теперь слегка искривленную поверхность общего вида. Она, как мы только что допустили, искривлена лишь слегка, а потому нулевым приближением к такой поверхности может служить евклидова плоскость. Более точные измерения, однако, способны выявить разницу. Например, посчитав сумму углов треугольника, возможно, удастся выявить отклонение этой суммы от π , то есть от того значения, которое должно получаться в евклидовой геометрии. Отклонение может быть в ту или другую сторону. Если отклонение первого порядка малости, то в качестве первого приближения можно взять либо сферу, либо гиперболическую плоскость. Это первое приближение, вообще говоря, зависит от точки, а кривизна этого приближения называется *кривизной поверхности в точке*. В отличие от сферы или гиперболической плоскости, кривизна в общем случае не является постоянной величиной, а является функцией на поверхности. Можно себе представить поверхность, имеющую в разных своих частях кривизну разных знаков. Представьте себе, например, рельеф горного массива. Горные пики будут, скорее всего, соответствовать участкам положительной кривизны, а перевалы — участкам отрицательной кривизны. Могут быть также плато, некоторые участки склонов и хребты, имеющие нулевую кривизну. Само понятие кривизны принадлежит К.Ф. Гауссу.

1.5. Теорема де Гуа. Речь идет о многомерном обобщении теоремы о том, что сумма углов произвольного треугольника на евклидовой плоскости равна π . Изложение, приводимое ниже, основано на [11]. Пусть P — выпуклый многогранник в \mathbb{R}^3 . Возьмем точку $p \in P$ либо внутри многогранника, либо на грани, либо на ребре, либо в вершине. Можно определить нормализованный угол α_p многогранника P в точке p следующим образом:

$$\alpha_p := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\text{area}(S_\varepsilon(p) \cap P)}{\text{area}(S_\varepsilon(p))}.$$

Здесь $S_\varepsilon(p)$ обозначает сферу радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке p , а предел при $\varepsilon \rightarrow +0$ означает предел справа в точке 0, то есть предел, вычисленный только по положительным значениям ε . В знаменателе дроби стоит полная площадь сферы радиуса ε , которая, как хорошо известно, составляет $4\pi\varepsilon^2$. А в числителе дроби стоит площадь той части сферы, которая попадает в многогранник P . Таким образом, если точка p является внутренней точкой, то $\alpha_p = 1$, а во всех остальных случаях $\alpha_p < 1$. Кстати говоря, то же самое определение имеет смысл и при $p \notin P$; в этом случае $\alpha_p = 0$. Если точка p попала на грань многогранника P , но не на ребро, то $\alpha_p = 1/2$. Для любой точки p любого ребра, за исключением концевых вершин, число α_p можно проинтерпретировать как подходящим образом нормированный двугранный угол, образованный двумя гранями многогранника P , сходящимися в данном ребре. Наконец, если p — вершина, то α_p совпадает с подходящим образом нормированным телесным углом при вершине p ; см. рис. 3 слева. Следующая теорема принадлежит Жану Полю де Гуа де Мальве (1713–1785)⁴.

Теорема (де Гуа). Пусть $P \subset \mathbb{R}^3$ — выпуклый многогранник. Выберем по одной точке в каждой вершине многогранника P , на каждом его ребре, на каждой грани, и одну точку внутри. Тогда сумма $\sum \pm \alpha_p$ по всем этим точкам равна нулю. Здесь знак плюс выбирается для точек четномерных объектов, т.е. для вершин и точек на гранях, а знак минус соответствует нечетной размерности, т.е. точкам на ребрах и точке внутри.

Нужно пояснить, почему сформулированная теорема де Гуа в самом деле обобщает теорему о сумме углов треугольника. Для этого последнюю теорему перепишем похожим образом. Определение угла α_p имеет смысл и в двумерном случае, то есть если P представляет собой выпуклый многоугольник на плоскости. В этом случае $S_\varepsilon(p)$ нужно интерпретировать как окружность радиуса ε с центром в точке p , а вместо площади участка сферы считать длину участка окружности. Тогда, в самом деле, можно отметить по точке

⁴Французский математик и ученый энциклопедист. По некоторым сведениям, именно он организовал и возглавил на начальном этапе проект создания французской энциклопедии, и он же нанял будущих ключевых участников, среди которых — Дидро и Даламбер.

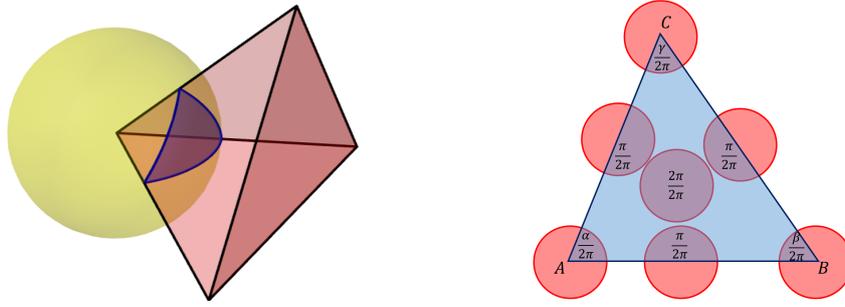


Рис. 3. Слева: нормализованный угол при вершине тетраэдра. Справа: двумерный аналог теоремы де Гуа. В треугольнике ABC отмечено 7 точек, а именно, три вершины, три точки на сторонах, и одна точка внутри треугольника. Знакопеременная сумма углов при этих точках равна нулю.

на каждом ребре треугольника P , а также отметить все вершины и одну точку внутри треугольника. Посчитаем соответствующую знакопеременную сумму $\sum \pm \alpha_p$. Сумма углов по точкам ребер составляет $3/2$, а угол при внутренней точке равен 1. Таким образом, сумма углов при вершинах (которая в силу теоремы о сумме углов треугольника и в силу выбранной нормализации составляет $1/2$) минус сумма углов при ребрах ($= 3/2$) плюс угол при внутренней точке ($= 1$) дает нуль, что и является двумерным вариантом теоремы де Гуа (см. рис. 3 справа).

Доказательство теоремы де Гуа для тетраэдра. Для начала докажем теорему де Гуа в предположении, что P — это тетраэдр с вершинами A, B, C, D . Рассмотрим сферу $S_\varepsilon(A)$ достаточно маленького радиуса ε . На самом деле, достаточно, чтобы радиус был меньше, чем расстояние от вершины A до плоскости BCD . В этом случае площадь сферического треугольника $S_\varepsilon \cap P$ составляет

$$\text{area}(S_\varepsilon \cap P) = 2\pi\varepsilon^2(\alpha_{AB} + \alpha_{AC} + \alpha_{AD} - 1/2).$$

Здесь α_{AB} обозначает нормализованный угол при ребре AB , и аналогично для ребер AC и AD , а сама формула является непосредственным следствием установленной выше взаимосвязи между площадью сферического треугольника и его дефектом. Из приведенной выше формулы получаем, что

$$\alpha_A = \frac{\alpha_{AB} + \alpha_{AC} + \alpha_{AD}}{2} - \frac{1}{4}.$$

Выпишем аналогичные формулы для всех вершин тетраэдра и просуммируем их. Тогда в левой части будет стоять сумма телесных углов при всех вершинах. А в правой части, с одной стороны, будет сумма нормализованных углов при всех ребрах (каждое ребро возникнет в правой части два раза, и оба раза с коэффициентом $1/2$), а с другой стороны будет еще число $-1 = 4 \times (-\frac{1}{4})$. Последнее число можно проинтерпретировать как $-2 + 1$, где -2 совпадает с суммой нормализованных углов при всех четырех гранях тетраэдра, а $+1$ совпадает с нормализованным углом при внутренней точке. \square

Рассмотрим теперь выпуклый многогранник P и, как описано в теореме де Гуа, отметим все вершины, а еще отметим по точке на каждой грани, по точке на каждом ребре, и одну точку внутри P . Соответствующую знакопеременную сумму $\sum \pm \alpha_p$ обозначим временно через $\mu(P)$. Мы, конечно, хотим доказать, что $\mu(P)$ всегда равно нулю для многогранников в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , но пока мы этого не знаем. Важное наблюдение состоит в том, что μ является простой мерой на многогранниках. Простота очевидна: как вытекает непосредственно из определения, $\mu(P) = 0$ для всякого вырожденного многогранника P , поскольку P (и даже вся содержащая его плоскость) не может высекать на сфере фигуру ненулевой площади. Теперь нужно проверить, что $\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q) - \mu(P \cap Q)$ всякий раз, когда $P \cup Q$ снова является выпуклым многогранником. Докажем сначала

частный случай этого общего свойства аддитивности, а именно, установим аддитивность при дополнительном предположении, что $P \cap Q$ является вырожденным многогранником, то есть многоугольником. Иными словами, в рассматриваемой ситуации имеется выпуклый многогранник $P \cup Q$, разрезанный плоскостью на два выпуклых многогранника P и Q , причем плоскость пересекает многогранник $P \cup Q$ по многоугольнику $P \cap Q$. При этих предположениях равенство $\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q)$ называется *аддитивностью при разрезаниях*, и мы хотим проверить, что μ удовлетворяет этому свойству аддитивности при разрезаниях.

Лемма. *Функция μ аддитивна при разрезаниях.*

Доказательство. Представим себе, что выпуклый многогранник Δ разрезан плоскостью на две части P и Q . Тем самым пересечение $\Pi := P \cap Q$ представляет собой двумерный многоугольник, расположенный в разрезающей плоскости. Разберем только случай, когда многоугольник Π не содержит никаких вершин многогранника Δ ; читателю предлагается разобрать остальные случаи. В многограннике Δ отметим точки следующим специальным образом. Отмеченная точка внутри Δ должна попасть в центр многоугольника Π , отмеченная точка грани многогранника Δ должна попасть на середину ребра многоугольника Π , если только на данной грани вообще имеется такое ребро. Наконец, отмеченная точка ребра многогранника Δ должна попасть в вершину многоугольника Π , если на данном ребре вообще имеется такая вершина. Таким образом, оказались отмеченными центр многоугольника Π , середины всех его ребер и все его вершины, а также еще какие-то точки, лежащие на гранях, ребрах или вершинах многоугольника Δ , но не попадающие в Π .

Система отмеченных точек многогранника Δ годится для вычисления всех трех чисел $\mu(\Delta)$, $\mu(P)$, $\mu(Q)$, но только для P и Q нужно эту систему дополнить. Чтобы, например, посчитать $\mu(P)$, нужно в качестве отмеченных точек многогранника P взять все те отмеченные точки многогранника Δ , которые попадают в P , и еще дополнительно отметить одну точку внутри P , по одной точке на каждой грани многогранника P , примыкающей к Π , и по одной точке на каждом ребре многогранника P , примыкающем к Π . С многогранником Q то же самое. Посмотрим, как вычисляется каждая из частей искомого равенства $\mu(\Delta) = \mu(P) + \mu(Q)$. Те из отмеченных точек, которые не попали в Π , считаются с одинаковыми весами как в левой, так и в правой части этого равенства. Центр многоугольника Π считается слева с весом -1 , а справа с весом $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Но зато справа посчитаны точки внутри P и Q , обе с весом -1 , которых нет в левой части: баланс соблюден, или, пользуясь спортивной терминологией счет ничейный. Далее, середина ребра многоугольника Π входит с весом $\frac{1}{2}$ в левую часть и с суммарным весом $-\frac{1}{2}$ в правую часть (если просуммировать вклады из $\mu(P)$ и $\mu(Q)$, то получится $-\frac{1}{2}$). Казалось бы, левая часть получает одно очко вперед для каждого ребра из Π , однако в правой части есть две отмеченные точки на примыкающих к данному ребру гранях многогранников P и Q ; этих точек нет в левой части. Итак, счет опять сравнялся. Наконец, каждая вершина многоугольника Π дает в левой части вклад, равный, со знаком минус, нормализованной мере двугранного угла при соответствующем ребре многогранника Δ . Тот же самый вклад, но со знаком плюс, получается суммированием соответствующих весов для многогранников P и Q . Левая часть снова вырывается вперед, но этот разрыв компенсируется отмеченными точками на примыкающих к Π ребрах многогранника Δ . В конечном итоге соревнование между левой частью и правой завершается ничьей. \square

Равенство $\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q)$ тем самым установлено в том случае, когда $P \cap Q$ — плоский многоугольник. Отсюда вытекает аддитивность меры μ посредством нижеследующего общего результата.

Лемма. *Рассмотрим функцию μ на выпуклых многогранниках, такую, что $\mu(P) = 0$ для всякого многогранника без внутренних точек (в частности, для $P = \emptyset$), и аддитивную*

при разрезании, то есть $\mu(P) = \mu(P_-) + \mu(P_+)$ каждый раз, когда выпуклый многогранник P оказывается разрезан некоторой плоскостью на две части P_+ и P_- . Тогда μ является простой конечно аддитивной мерой на многогранниках.

Нам уже пришлось эту лемму использовать неявно. А теперь мы ее строго докажем.

Доказательство. Пусть P и Q — такие выпуклые многогранника, что $P \cup Q$ выпукло. Нам нужно доказать свойство аддитивности, а именно, что $\mu(P \cup Q) + \mu(P \cap Q) = \mu(P) + \mu(Q)$. Если многогранник $P \cap Q$ вырожден, то искомое свойство вытекает из аддитивности при разрезании. Допустим теперь, что $P \cap Q$ имеет размерность три. Плоскости всех граней многогранника $P \cap Q$ разбивают фигуру $P \cup Q$ на конечное число выпуклых кусков, каждый из которых является выпуклым многогранником. Из аддитивности при разрезании можно вывести, что мера $\mu(P \cup Q)$ равна сумме μ -мер всех полученных описанным способом кусков. Это проверяется непосредственной индукцией по количеству кусков: достаточно взять любую из проведенных плоскостей, проходящую через внутренность многогранника $P \cup Q$, и воспользоваться предположением индукции для каждой из двух частей, на которые данная плоскость делит многогранник, а затем воспользоваться аддитивностью при разрезании. Точно также, величина $\mu(P \cap Q)$ представляет из себя сумму μ -мер всех кусков, попавших в $P \cap Q$; и тем самым в левой части искомого равенства эти куски оказываются посчитанными дважды. Но точно также обстоит дело и с правой частью: там посчитаны все куски, попавшие в P или в Q (т.е. попавшие в объединение $P \cup Q$), причем дважды посчитаны те куски, которые оказались и там, и там. \square

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы де Гуа.

Доказательство теоремы де Гуа. Напомним, что сумма $\sum \pm \alpha_p$, фигурирующая в формулировке теоремы де Гуа, была обозначена через μ . Кроме того, выше было установлено, что μ обращается в нуль на всех вырожденных многогранниках (включая пустое множество) и аддитивна при разрезаниях. В силу доказанной выше леммы, отсюда вытекает, что μ — простая мера на многогранниках. Далее, каждый многогранник можно разрезать на тетраэдры (см. задачу ниже). Теперь теорема вытекает из уже доказанного частного случая для тетраэдра и свойства аддитивности. \square

В доказательстве был использован результат следующей задачи. Этот результат полезен и для многих других вещей.

Задача. Докажите, что всякий невырожденный выпуклый многогранник в \mathbb{R}^3 можно разрезать на тетраэдры. Точнее говоря, его можно представить в виде объединения тетраэдров таким образом, чтобы разные входящие в это объединение тетраэдры пересекались только по общей грани, ребру или вершине (или вообще не пересекались). Более того, разрезание можно осуществить таким способом, чтобы все вершины всех полученных тетраэдров также были вершинами исходного многогранника.

Честно говоря, применение свойства аддитивности к совокупности тетраэдров, на которые разрезан данный многогранник, требует некоторых дополнительных рассуждений, и проще всего здесь воспользоваться формулой включения-исключения, которую мы обсудим в следующем разделе. Закончим этот раздел одним замечанием про слегка искривленные пространства.

Замечание. Предположим, как и выше (при обсуждении углового дефекта), что пространство слегка искривлено. Тогда все еще можно говорить про прямые как про линии кратчайшего расстояния. Допустим (хотя это существенное допущение, которое выполнено не всегда), что можно также говорить про плоскости. Основное свойство плоскости состоит в том, что если провести прямую через любые две точки плоскости, то эта прямая будет целиком лежать в данной плоскости. Наше допущение выполнено, скажем, на трехмерной сфере и в трехмерном гиперболическом пространстве, и это в каком-то смысле самые главные примеры. Из-за искривления пространства соотношения евклидовой

геометрии перестают выполняться. В частности, теорема де Гуа может нарушаться. Это нарушение дает интересную меру на многогранниках, тесно связанную с понятием кривизны пространства.

1.6. Теорема Эйлера. Рассмотрим *триангуляцию* сферы. *Триангулировать* сферу — значит, разбить ее на конечное число сферических треугольников. Каждый сферический треугольник должен быть ограничен тремя отрезками больших окружностей. Обозначим через f_0 , f_1 , f_2 число вершин, ребер и граней рассматриваемой триангуляции. Мы под этим понимаем вершины рассматриваемых треугольников, их ребра, и сами треугольники, соответственно. Для каждого из треугольных кусков посчитаем угловой дефект, а потом просуммируем все эти дефекты. Полученную сумму можно представить следующим образом: сумма всех имеющихся углов минус $f_2\pi$. Чтобы просуммировать все углы, достаточно проделать это при каждой вершине (получится 2π , то есть полный угол) и сложить по всем вершинам. Итого сумма равна $2\pi f_0$. Суммарный дефект всех треугольников тем самым составляет $(2f_0 - f_2)\pi$. А с другой стороны, мы можем воспользоваться установленным фактом, что дефект пропорционален площади (выберем радиус сферы таким образом, чтобы коэффициент пропорциональности был равен единице). Значит, суммарный дефект совпадает с суммарной площадью всех треугольников, а это площадь всей сферы, то есть 4π . Мы доказали следующее тождество

$$2f_0 - f_2 = 4$$

для любой триангуляции сферы.

Лемма. *Всякая триангуляция сферы удовлетворяет соотношению*

$$2f_1 = 3f_2.$$

Доказательство. Каждое ребро примыкает к двум граням, поэтому можно посчитать все грани, умножив число ребер на два. Однако каждая грань будет посчитана таким образом трижды, поскольку на каждой грани по три ребра. \square

Теперь мы можем скомбинировать два полученных ранее тождества:

$$4 = 2f_0 - f_2 = 2f_0 - 2f_1 + 2f_1 - f_2 = 2f_0 - 2f_1 + 3f_2 - f_2 = 2(f_0 - f_1 + f_2).$$

В результате получаем следующую теорему, полученную Эйлером.

Теорема (Эйлер). *Для любой триангуляции сферы имеет место равенство*

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2.$$

Эта частная формулировка допускает далекие обобщения. Мы будем двигаться постепенно, в сторону увеличения общности. Рассмотрим эйлерову характеристику выпуклых сферических многоугольников (мы ограничимся рассмотрением только таких выпуклых многоугольников, каждый из которых целиком уместается в некоторой полусфере). Впрочем, до поры до времени нам будет неважно, на сфере или на плоскости (а в последнем случае — на евклидовой плоскости или на гиперболической) рассматриваются многоугольники. По определению, эйлерова характеристика любого замкнутого выпуклого многоугольника равна единице, и эта тривиальная мера действительно является конечно аддитивной величиной. Если выпуклый многоугольник P каким-то способом разрезан на треугольники, то его эйлерову характеристику можно посчитать двумя способами. С одной стороны, $\chi(P) = 1$ по определению. А с другой стороны, $\chi(P)$ выражается через эйлерову характеристику всех кусков и их пересечений при помощи свойства аддитивности.

Теорема (Формула включения–исключения). *Пусть Ω — система подмножеств множества X , содержащая \emptyset . Если μ — мера на Ω , то выполнено равенство*

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{1 \leq i \leq n} \mu(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

для любых $A_1, \dots, A_n \in \Omega$, таких, что объединение всех этих множеств и пересечения любых поднаборов этих множеств тоже принадлежат системе Ω .

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться индукцией по n и свойством аддитивности. Формула включения–исключения, в частности, применима к эйлеровой характеристике. Если выпуклый многоугольник P разбит на конечное число кусков P_1, \dots, P_n , каждый из которых тоже, в свою очередь, является выпуклым многоугольником, то можно определить целые положительные числа f_2, f_1, f_0 следующим образом. Через f_2 обозначено просто число кусков, а через f_0 — число вершин всех кусков. При этом каждая вершина считается только один раз, вне зависимости от того, скольким кускам она принадлежит. Наконец, f_1 — это число ребер подразбиения. Здесь есть одна существенная тонкость. Ребра подразбиения — это не то же самое, что ребра кусков подразбиения. Можно определить ребро подразбиения как отрезок, соединяющий две вершины подразбиения и не содержащий других вершин. Такой отрезок может оказаться всего лишь частью ребра того или иного куска, а не всем ребром. Итак, для каждого подразбиения многоугольника P определены числа f_0, f_1, f_2 . Вычисление эйлеровой характеристики $\chi(P)$ по формуле включения–исключения дает в качестве ответа $f_2 - f_1 + f_0$, в чем мы сейчас убедимся.

Первые два слагаемых в формуле включения–исключения равны

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \chi(P_i) = f_2, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} \chi(P_i \cap P_j) = f_1 + \sum_v \binom{k_v}{2} - \binom{k_v}{1}.$$

(Через $\binom{k}{i}$ обозначено число сочетаний из k элементов по i , в континентальной традиции иногда обозначаемое через C_k^i ; мы пользуемся — во всей видимости, взявшей верх, за исключением консервативной школьной программы — англо–американской традицией). В правой части последнего равенства суммирование ведется по всем вершинам разбиения, а k_v обозначает число кусков, сходящихся в вершине v . Сумма по вершинам учитывает те случаи, когда $P_i \cap P_j$ — не ребро, а вершина. Для каждой вершины v число таких случаев — это число пар несоседних кусков в смысле циклического порядка вокруг этой вершины. Чтобы сосчитать пары несоседних кусков, достаточно из числа всех пар, то есть из $\binom{k_v}{2}$, вычесть число соседних пар, то есть $\binom{k_v}{1}$. Обратите внимание: все остальные члены правой части формулы включения–исключения уже оперируют только с вершинами нашего разбиения, и вот сколько раз конкретная вершина v будет посчитана в формуле:

$$\binom{k_v}{3} - \binom{k_v}{4} + \dots + (-1)^{k_v-1} \binom{k_v}{k_v} = -1 + \binom{k_v}{1} - \binom{k_v}{2}.$$

Здесь мы воспользовались тем хорошо известным фактом, что знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов равна нулю. Из всего вышесказанного теперь легко следует, что формула включения–исключения дает в случае рассматриваемого разбиения результат $f_0 - f_1 + f_2$, как и было анонсировано. Этот результат имеет смысл оформить как отдельную теорему.

Теорема (Эйлер). *Для разбиения выпуклого плоского многоугольника на выпуклые многоугольники, выполнено равенство $f_0 - f_1 + f_2 = 1$. Тот же результат справедлив для выпуклых многоугольников на гиперболической плоскости и для выпуклых сферических многоугольников, уместающихся в одной полусфере.*

Следующий вариант теоремы Эйлера имеет дело с разбиениями всей сферы.

Теорема (Эйлер). *Для разбиения сферы на выпуклые многоугольники, каждый из которых уместается в некоторой полусфере, выполнено равенство $f_0 - f_1 + f_2 = 2$.*

Доказательство. Каждый из многоугольников разбиения можно разрезать диагоналями на треугольники. Будем осуществлять эти разрезы не все одновременно, а по одному, и проследим за тем, как меняется величина $f_0 - f_1 + f_2$. Если проведена одна новая диагональ, то число f_2 увеличится на единицу, поскольку проведенная диагональ разобьет

соответствующий многоугольник на два более мелких куска. При этом число f_1 тоже увеличится на единицу, поскольку новая диагональ является новым ребром разбиения, а все старые ребра разбиения никуда не делись. Наконец, f_0 никак не поменяется, поскольку новая диагональ соединяет уже имевшиеся в наличии вершины. Итак, число $f_0 - f_1 + f_2$ останется прежним при каждой операции проведения диагонали. В самом конце мы получим триангуляцию сферы, и по доказанной ранее теореме, $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ в конце. Значит, $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ и с самого начала, что и требовалось доказать. \square

Выражение $f_0 - f_1 + f_2$ можно проинтерпретировать как эйлерову характеристику всей сферы. Изначально, эйлерова характеристика была определена только на выпуклых многоугольниках, и то лишь на тех, которые целиком умещались в некоторой полусфере. Далее, можно распространить меру χ на произвольные объединения выпуклых многоугольников, в том числе и на всю сферу. Обратите внимание на существенную разницу: эйлерова характеристика выпуклого многоугольника равна 1, а у всей сферы она равна 2.

Задача. Пусть B , P , Γ — соответственно, число вершин, ребер и граней некоторого выпуклого многогранника в трехмерном евклидовом пространстве. Тогда $B - P + \Gamma = 2$. Выведите это утверждение из теоремы Эйлера для сферы. *Указание:* разместите многогранник так, чтобы центр сферы был внутри многогранника, а затем спроецируйте все вершины, ребра и грани многогранника на сферу. Получится некоторое разбиение сферы на выпуклые сферические многоугольники. К нему применима доказанная выше теорема.

Вообще-то, возможны и более широкие обобщения. Заметим, прежде всего, что эйлерову характеристику как меру можно распространить не только на объединения многоугольников, но и на их разности. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого важного факта. Оно не представляет содержательных трудностей, но нужно разобраться с некоторыми (возможно, не самыми приятными) техническими деталями. Другими словами, χ можно рассматривать как меру на множестве всех фигур, которые можно получить как объединение выпуклых многоугольников минус другое (или то же самое) объединение выпуклых многоугольников. Среди таких фигур выделяются наиболее простые, называемые *клетками*. Например, двумерная клетка — это многоугольник с непустой внутренностью, из которого удалили границу, то есть оставили только внутренность. Многоугольник не обязан быть выпуклым, но внутри него не должно быть «дырок». Одномерная клетка — это отрезок с выкинутыми концами, то есть интервал некоторой прямой. А нульмерная клетка — это просто точка. Легко понять, что клетка e размерности k удовлетворяет равенству $\chi(e) = (-1)^k$. Кроме того, любую фигуру из нашего класса можно представить в виде объединения непересекающихся клеток. В частности, любому разбиению выпуклого многоугольника на выпуклые многоугольные куски отвечает также разбиение на клетки: двумерные клетки — это куски разбиения с выкинутыми границами, одномерные клетки — это ребра разбиения с выкинутыми концами, и нульмерные клетки — это вершины разбиения. Это представление позволяет проинтерпретировать числа f_0 , f_1 , f_2 , связанные с данным разбиением, как количество клеток размерностей 0, 1, 2, соответственно. Равенство $f_0 - f_1 + f_2 = 1$ при такой интерпретации сводится к аддитивности эйлеровой характеристики. Аналогичная интерпретация имеет место и для эйлеровой характеристики всей сферы.

Далее, можно отказаться от требования, что ребра разбиения — непременно прямолинейные интервалы, и что грани разбиения непременно выпуклы. Оказывается, достаточно потребовать, чтобы каждое ребро было простой несамопересекающейся кривой, а каждая грань была ограничена такого вида ребрами и не содержала никаких дырок, то есть граница каждой грани должна сводиться к единственной простой несамопересекающейся замкнутой кривой. *Картой на сфере* называется геометрическая структура, состоящая из конечного набора точек на сфере (вершин), простых кривых с выкинутыми концами (ребер) и ограниченных простыми циклами ребер кусков (граней). Для каждой карты можно ввести числа f_0 , f_1 , f_2 — количество вершин, ребер и граней, соответственно. Вот

самая общая формулировка теоремы Эйлера для двумерной сферы (мы оставим ее без доказательства).

Теорема (Эйлер). Для всякой карты на сфере с f_0 вершинами, f_1 ребрами и f_2 гранями справедливо равенство $f_0 - f_1 + f_2 = 2$.

2. РАВНОСОСТАВЛЕННОСТЬ

Допустим, что многоугольник P разрезан на конечное число кусков P_1, \dots, P_n так, что каждый кусок — выпуклый многоугольник. Если из этих кусков можно сложить другой многоугольник Q , то мы говорим о *равносоставленности* фигур P и Q . Это неформальное определение нуждается в уточнении. Что значит «можно сложить»? Интуитивное представление состоит в том, что куски можно как-то двигать, не меняя их формы. Выражаясь более формально, многоугольник Q оказывается разрезанным на конечное число кусков Q_1, \dots, Q_n , при этом каждый кусок Q_i многоугольника Q получен движением соответствующего куска P_i многоугольника P . *Евклидово движение* — это уже достаточно точное понятие, которое, кроме того, является одним из основных понятий евклидовой геометрии. Однако, если обсудить классификацию евклидовых движений, то можно получить соответствующую классификацию понятий равносоставленности.

2.1. Группы движений и равносоставленность. Ниже, говоря про плоскость, мы имеем в виду евклидову плоскость \mathbb{R}^2 . Формально говоря, движение плоскости \mathbb{R}^2 — это такое отображение $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое сохраняет расстояния между точками, то есть, для любых $x, y \in \mathbb{R}^2$, расстояние от x до y совпадает с расстоянием от $f(x)$ до $f(y)$. Движения делятся на *собственные* и *несобственные*. Собственные движения сохраняют направления по и против часовой стрелки. В частности, если сторона CB равнобедренного прямоугольного (с прямым углом C) треугольника ABC получена из стороны CA поворотом на 90 градусов по часовой стрелке, то и сторона $f(C)f(B)$ может быть получена из стороны $f(C)f(A)$ треугольника $f(A)f(B)f(C)$ вращением на 90 градусов по часовой стрелке, а не против нее. Можно показать, что собственные движения сводятся к поворотам и параллельным переносам. Их можно себе представлять как результат непрерывного скольжения плоскости по себе самой. Несобственные движения — такие, которые можно получить, «перевернув плоскость на другую сторону». К таким движениям относится *отражение* относительно прямой, то есть осевая симметрия. Можно еще отражение скомбинировать с параллельным переносом вдоль оси симметрии — получится так называемое *скользящее отражение*.

Если f и g — движения плоскости, то композиция $g \circ f$ (сначала применяем преобразование f , а потом g) тоже является движением. Тожественное преобразование id , оставляющее все точки на месте — движение, хотя это и не очень согласуется с обычным смыслом этого слова. Наконец, обратное преобразование f^{-1} к движению f снова является движением. Все эти свойства вполне очевидны, если определять движения как преобразования, сохраняющие расстояния. Говорят, что все движения плоскости *образуют группу*, имея в виду перечисленные только что свойства. Можно сформировать группы не из всех, а из некоторых движений. Ниже мы дадим точное определение.

Определение (Группа движений). Непустое множество G движений называется *группой движений*, если выполнено следующее свойство

$$\forall f, g \in G \quad g^{-1} \circ f \in G.$$

Отсюда сразу следует, что $id \in G$ (возьмем $f = g$), а также что $g^{-1} \in G$ для всякого $g \in G$ (возьмем $f = id$) и что $g \circ f \in G$ для любых $f, g \in G$ (подставим g^{-1} вместо g в сформулированное выше свойство).

Например, все собственные движения образуют группу движений, а все несобственные — нет. Еще, например, все параллельные переносы образуют группу движений. Теперь, наконец, мы можем сформулировать понятие равносоставленности относительно некоторой группы движений.

Определение (G -равносоставленность). Зафиксируем некоторую группу движений G и рассмотрим два многоугольника P и Q , не обязательно выпуклых. Допустим, что

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_n, \quad Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_n, \quad Q_i = g_i(P_i), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Здесь P_i — выпуклые многоугольники, не имеющие общих внутренних точек, Q_i — тоже выпуклые многоугольники, не имеющие общих внутренних точек, а g_i — движения из группы G . В этом случае говорим, что P и Q являются G -равносоставленными (или равносоставленными относительно группы G), и пишем $P \simeq_G Q$.

Сразу же укажем на непосредственную связь между равносоставленностью и мерами. Мера μ на многоугольниках называется G -инвариантной, если для всякого многоугольника P и для всякого движения $g \in G$, многоугольники P и gP имеют одинаковую μ -меру, то есть $\mu(P) = \mu(gP)$. Например, если G — группа всех параллельных переносов, то G -инвариантную меру μ называют также *трансляционно инвариантной*, или T -инвариантной.

Теорема. Пусть G — группа движений плоскости. Зафиксируем простую G -инвариантную меру μ . Если $P \simeq_G Q$, то $\mu(P) = \mu(Q)$.

Доказательство. Допустим, что

$$P = P_1 \cup \dots \cup P_n, \quad Q = Q_1 \cup \dots \cup Q_n, \quad Q_i = g_i(P_i), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

как в определении G -равносоставленности. Поскольку многоугольники P_i не имеют общих внутренних точек и в силу аддитивности меры μ , получаем, что $\mu(P)$ есть сумма мер $\mu(P_i)$ по всем $i = 1, \dots, n$. Далее, $\mu(P_i) = \mu(Q_i)$ в силу G -инвариантности. Наконец, сумма членов $\mu(Q_j)$ совпадает с $\mu(Q)$ по тем же причинам, которые были указаны выше для многоугольника P и его кусков P_i . \square

Из теоремы следует, в частности, что у равносоставленных многоугольников обязаны совпадать площади. Дело в том, что площадь сохраняется при любых движениях. Если ограничить группу движений, то могут быть другие инвариантные меры (скажем, такие, которые не сохраняются при всех движениях, но сохраняются под действием конкретной группы), и некоторые такие меры для некоторых специальных групп мы обсудим.

Замечание (Другие размерности). Определение равносоставленности переносится, почти без изменений, на другие размерности. В частности, можно говорить про равносоставленность трехмерных, четырехмерных, и так далее, многогранников, а также про равносоставленность отрезков. Как и в случае плоскости, нужно зафиксировать некоторую группу G движений пространства \mathbb{R}^d , чтобы определить понятие G -равносоставленности. Чаще всего, в качестве G выбирают либо полную группу движений, либо группу всех сохраняющих ориентацию движений, либо группу всех параллельных переносов.

Следующие свойства равносоставленности устанавливаются непосредственной проверкой.

Задача. Докажите, что G -равносоставленность является отношением эквивалентности. А именно:

- всегда $P \simeq_G P$,
- если $P \simeq_G Q$, то также $Q \simeq_G P$,
- а если $P \simeq_G Q$ и $Q \simeq_G R$, то тогда $P \simeq_G R$.

Какую роль в решении этой задачи играет тот факт, что G представляет из себя группу, а не просто множество, движений плоскости? Можно ли обобщить результат на случай группы преобразований плоскости, не обязательно состоящих из движений?

Обратите внимание только на следующее обстоятельство. Если, скажем, равноставленность многоугольников P и Q получается разрезанием на n кусков, а равноставленность многоугольников Q и R получается разрезанием на m кусков, то для установления равноставленности многоугольников P и R может понадобиться больше, чем $\max(n, m)$ кусков. Однако заведомо не больше чем nm кусков.

2.2. Теорема Уоллеса–Бойяи–Гервина. Это очень классический результат, который некоторые авторы даже приписывают Евклиду (III век до н.э.).⁵ Хотя, конечно, у Евклида такой явной формулировки не было, хотя были все основные идеи. Вообще, понятие «равенства фигур» у Евклида используется в разных смыслах без пояснений. Иногда равенство означает конгруэнтность (то есть что одну фигуру можно перевести в другую фигуру некоторым движением), а иногда равноставленность. Четкая формулировка возникла независимо у разных авторов в разное время. Перечисленные авторы — это те, в работах которых соответствующие формулировки удалось обнаружить. Кстати, Бойяи — это Бойяи старший, Фаркаш⁶ — отец Яноша Бойяи, одного из авторов гиперболической геометрии.

Теорема (Уоллес⁷–Бойяи–Гервин). *Два ограниченных многоугольника на плоскости равноставленны (относительно полной группы движений плоскости) тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую площадь.*

В одну сторону теорема уже была доказана, а именно, равноставленные многоугольники имеют одинаковую площадь. Остается доказать, что два многоугольника одинаковой площади равноставлены. Начнем со следующей леммы.

Лемма. *Любой треугольник G -равноставлен с некоторым прямоугольником, где G — группа, состоящая из всех преобразований вида $x \mapsto a \pm x$ (здесь $a \in \mathbb{R}^2$ и точка x пробегает \mathbb{R}^2), то есть из всех параллельных переносов и всех поворотов на угол π относительно всевозможных точек плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и расположим его так, чтобы одна из сторон (скажем, AC) была горизонтальна, а вершина B располагалась выше прямой AC , см. рис. 4. За нами выбор того, какую сторону называть стороной AC , и мы можем, например, выбрать самую длинную сторону. В этом случае углы A и C обязаны быть острыми, а высота из точки B падает внутрь стороны AC , а не наружу. Проведем среднюю линию A_1C_1 треугольника ABC , параллельную стороне AC . Высота из вершины B разбивает треугольник A_1BC_1 на два прямоугольных треугольника. Эти треугольники можно отразить (то есть повернуть на угол π) относительно вершин A_1, C_1 , и повернутые треугольники, вместе с нижней частью треугольника ABC , то есть четырехугольником AA_1C_1C , образуют прямоугольник. Основание полученного прямоугольника совпадает со стороной AC , а высота прямоугольника равна половине высоты треугольника ABC . \square

⁵Личность Евклида покрыта тайной — известно только, что он жил и работал в Александрии при ранних Птолемеях. Сохранившийся трактат Евклида «Начала» стал образцом изложения классической планиметрии и стереометрии, которому в значительной степени продолжают следовать школьные учебники вплоть до наших дней. Трактат состоит из тринадцати томов; в основном это обзор ранее известных результатов. До нас дошли многократно переписанные копии с нагромождениями комментариев, не всегда легко отделимых от оригинала.

⁶Фаркаш Бойяи (1775–1856) — венгерский математик, поэт, изобретатель и астроном. Друг К.Ф. Гаусса.

⁷Уильям Уоллес (1768–1843) — шотландский математик и астроном. Сын кожного промышленника, поначалу освоивший профессию переплетчика книг, и только потом, в результате самообразования, проявивший математические способности. Один из учителей Уоллеса — Джон Плейфер, один из авторов современной версии аксиомы о параллельных, а одна из учениц — Мэри Сомервиль.

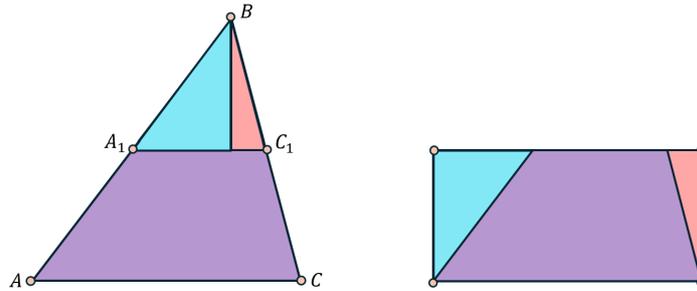


РИС. 4. Треугольник равносоставлен прямоугольнику. Чтобы составить из частей треугольника прямоугольник, можно нижнюю часть треугольника оставить на месте, а верхнюю разрезать и поворотами на 180 градусов поместить эти куски вниз, дополнив ими нижнюю часть.

Обсудим теперь равносоставленность прямоугольников. Будем обозначать через $R(a, b)$ прямоугольник с длинами сторон a и b — например, можно считать, что стороны прямоугольника горизонтальны или вертикальны, причем горизонтальные стороны имеют длину a , а вертикальные — длину b . Разрежем прямоугольник $R(a, b)$ на две равные части горизонтальной прямой, делящей пополам вертикальные стороны этого прямоугольника. Из полученных частей можно составить прямоугольник $R(2a, b/2)$. Совершенно аналогично, можно показать, что $R(a, b)$ равносоставлен прямоугольнику $R(na, b/n)$ для всякого натурального числа n (для этого нужно сделать $n - 1$ горизонтальных разрезов в $R(a, b)$). Далее, если горизонтальные разрезы заменить вертикальными, то, по тому же принципу, можно установить равносоставленность прямоугольников $R(a/m, mb)$ и $R(a, b)$ (или же можно просто воспользоваться симметричностью равносоставленности). Таким образом, для всякого положительного рационального числа q имеется равносоставленность между $R(a, b)$ и $R(qa, q^{-1}b)$. Разумеется, для равносоставленности между $R(a, b)$ и $R(a', b')$ необходимо равенство $ab = a'b'$, то есть необходимо сохранение площади, а согласно сказанному выше, размеры прямоугольника, равносоставленного с $R(a, b)$, могут сколь угодно близко подойти к любой паре (a', b') , такой, что $a'b' = ab$. Например, можно добиться, чтобы ширина a' почти была равна 1. Хочется, однако, сделать a' в точности равной единице. Для этого нужно научиться хотя бы немного, но непрерывно менять размеры прямоугольника так, чтобы получались равносоставленные фигуры.

Чтобы осуществить такое непрерывное изменение, можно вернуться к предыдущему шагу, когда из треугольника получался прямоугольник. Этот шаг, разумеется обратим — можно из прямоугольника сделать треугольник, причем многими различными способами. А именно, основание треугольника фиксировано, а противоположную (верхнюю) вершину можно непрерывно двигать вдоль прямой, параллельной основанию. При этом, если прямоугольник был не слишком вытянутый, то треугольник получится остроугольный. Заметим, что из полученного треугольника можно сделать прямоугольник по-другому, просто взяв за основание другую сторону. А поскольку длину этой другой стороны можно менять непрерывно, мы получили искомый результат. Итак, мы доказали следующую лемму.

Лемма. *Прямоугольник $R(a, b)$ всегда равносоставлен относительно группы всех сохраняющих ориентацию движений плоскости с прямоугольником $R(ab, 1)$. Следовательно, любой треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником вида $R(c, 1)$.*

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы Уоллеса–Бойяи–Гервина.

Доказательство теоремы Уоллеса–Бойяи–Гервина. Достаточно доказать, что всякий выпуклый многоугольник P площади s равносоставлен с прямоугольником $R(s, 1)$ — тогда многоугольники равной площади окажутся равносоставлены с одним и тем же прямоугольником, а значит, и друг с другом. Во-первых, P можно разрезать на треугольники

$\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Во-вторых, каждый из этих треугольников Δ_i равносоставлен с $R(s_i, 1)$, где s_i — площадь треугольника Δ_i . Наконец, составим из прямоугольников $R(s_i, 1)$ один прямоугольник $R(s, 1)$. \square

2.3. Меры Хадвигера. В этом разделе мы зафиксируем группу движений плоскости, состоящую из всех параллельных переносов. Обозначим эту группу через T . Равносоставленность относительно группы T будет называться *T-равносоставленностью*. Ниже приводится замечательный результат — решение задачи *T-равносоставленности* на плоскости — принадлежащий швейцарским математикам Хадвигеру и Глур⁸ и полученный ими в 1951 году [10]. Оказывается, что для *T-равносоставленности* двух многоугольников уже не достаточно совпадения площадей. Имеется много других инвариантов равносоставленности, то есть простых мер на многоугольниках, инвариантных относительно параллельных переносов. Дадим сначала определение этих мер.

Определение (меры Хадвигера). Зафиксируем прямую L . Как известно, прямая делит плоскость на две полуплоскости. Если одну из двух этих полуплоскостей назвать положительной, а другую отрицательной, то тем самым будет зафиксирована *коориентация* прямой L . Фиксированная ко-ориентация прямой L задает также ко-ориентацию любой другой прямой, параллельной прямой L . А именно, если L' и L параллельны, то положительная полуплоскость относительно L' — та, которая пересекается с положительной полуплоскостью прямой L по полуплоскости, а не по полосе. Про точки (и другие геометрические объекты), лежащие в положительной полуплоскости относительно L , говорят также, что они лежат *по положительную сторону* от L . Рассмотрим теперь выпуклый многоугольник P с непустой внутренностью и две прямые L_{\pm} , пересекающиеся с P только по граничным точкам и параллельные прямой L . Требуется, чтобы прямые L_{\pm} на самом деле имели общие точки с P , то есть как бы зажимали этот многоугольник с двух сторон. Можно так выбрать индексы \pm , чтобы P лежал по положительную сторону от L_+ и по отрицательную сторону от L_- . Определим меру μ_L на многоугольнике P формулой

$$\mu_L(P) := \text{Len}(P \cap L_+) - \text{Len}(P \cap L_-).$$

Здесь $\text{Len}(P \cap L_{\pm})$ означает евклидову длину отрезка или точки $P \cap L_{\pm}$. Если P вырожден, то есть не имеет внутренних точек, то мы положим $\mu_L(P) := 0$. Можно проверить (см. ниже комментарий по этому поводу), что μ_L — мера на многоугольниках. Она называется *мерой Хадвигера*, связанной с данной коориентированной прямой L .

Приведенное только что определение мер Хадвигера нуждается в некоторых комментариях. Если прямая L' пересекает выпуклый многоугольник P , и при этом P лежит нестрого по одну сторону от L' , то говорят, что L' является *опорной прямой* для P . Для случая, когда P имеет непустую внутренность, это равносильно предположению, что $P \cap L'$ является непустым множеством, состоящим только из граничных точек многоугольника P . У P имеется две опорные прямые, параллельные прямой L , причем сам P лежит по положительную сторону от одной из этих прямых, L_+ , и по отрицательную сторону от второй опорной прямой, L_- . Все эти утверждения интуитивно очевидны и допускают непосредственную проверку. Пересечение $P \cap L'$ многоугольника P с опорной прямой L' может состоять из ребра или вершины многоугольника P . Можно в любом случае говорить о длине множества $P \cap L'$, считая, что точка имеет нулевую длину.

Разрежем многоугольник P прямолинейным разрезом на два многоугольника P_1 и P_2 . Хочется проверить, что $\mu_L(P) = \mu_L(P_1) + \mu_L(P_2)$. Это частный случай аддитивности; свойство аддитивности в общем виде вытекает из этого частного случая, как показано в

⁸Гуго Хадвигер (1908–1981) — автор ряда широко известных работ по комбинаторной геометрии и глава Бернской геометрической школы. Он же, вместе со своим учеником и коллегой Паулем Глуром и другими сотрудниками, разработал для нужд швейцарской армии модель шифровальной машины NEMA, которая пришла на смену использовавшейся ранее немецкой Энигмы. Машина NEMA использовалась вооруженными силами Швейцарии с 1947 по 1992 гг.

разделе 1.5. Если разрез не параллелен прямой L , то искомое равенство устанавливается очень просто: каждый из двух членов в $\mu_L(P)$ входит либо в $\mu_L(P_1)$, либо в $\mu_L(P_2)$, причем с тем же знаком. Рассмотрим случай, когда разрез параллелен прямой L . В этом случае появляются лишние члены в правой части, связанные с разрезом. Однако эти лишние члены взаимно уничтожаются, поскольку P_1 и P_2 лежат по разные стороны от разреза.

Задача. Приведите полное доказательство того, что μ_L является простой конечно-аддитивной мерой на многоугольниках.

Теперь мы можем сформулировать критерий, позволяющий эффективным образом решать вопрос о T -равносоставленности конкретных пар многоугольников.

Теорема (Хадвигер и Глур, 1951). *Два плоских многоугольника P и Q являются T -равносоставленными тогда и только тогда, когда у P и Q одна и та же площадь и, для всякой коориентированной прямой L , одно и то же значение меры μ_L , то есть*

$$\text{area}(P) = \text{area}(Q), \quad \mu_L(P) = \mu_L(Q) \quad (\forall L).$$

Итак, пусть даны два многоугольника, и требуется понять, равносоставлены ли они при помощи параллельных переносов. Разумеется, ответить на этот вопрос непосредственным перебором всех возможных разрезов и перекладываний полученных кусков невозможно. Однако теорема дает другой способ. Достаточно всего лишь посчитать площади и меры Хадвигера для обоих многоугольников и сравнить их. Если получится полное совпадение, то многоугольники T -равносоставлены, а если совпадения не будет, то не будет и равносоставленности. На первый взгляд может показаться, что такой способ неэффективен, поскольку придется сравнивать значения бесконечного числа мер Хадвигера — всего ведь мер Хадвигера ровно столько, сколько имеется коориентированных прямых на плоскости. Однако нетрудно сообразить, что для двух данных многоугольников P и Q достаточно рассмотреть лишь конечное число мер Хадвигера, а именно, лишь те меры, которые соответствуют продолжениям ребер обоих многоугольников. Для любой прямой L , не параллельной ни одному ребру ни одного из двух многоугольников, нетрудно видеть, что $\mu_L(P) = \mu_L(Q) = 0$. Таким образом, для данных P и Q достаточно посчитать конечный набор чисел и их сравнить.

Прежде чем доказывать теорему Хадвигера и Глура, отметим несколько важных следствий. Во-первых, совпадения площади не достаточно для T -равносоставленности. Например, не может быть никакой T -равносоставленности между параллелограммом и треугольником, поскольку у параллелограмма все меры Хадвигера равны нулю, а у треугольника есть ненулевые меры Хадвигера — в качестве L нужно выбрать прямую, параллельную любой из трех сторон треугольника. Во-вторых, все параллелограммы одинаковой площади равносоставлены друг с другом при помощи параллельных переносов. Интересный частный случай этого утверждения получится, если взять квадрат и повернуть его на произвольный угол. Несмотря на то, что T -равносоставленность не допускает никаких вращений — куски можно параллельно сдвигать, но не поворачивать — квадрат оказывается T -равносоставленным с повернутым квадратом. Это интересное явление проиллюстрировано на рис. 5 (на этом рисунке приводится явное разрезание).

Мы должны доказать теорему Хадвигера и Глура в обе стороны. Однако в одну сторону — что из T -равносоставленности вытекает совпадение площадей и всех инвариантов Хадвигера — утверждение уже фактически было доказано ранее, точнее говоря, оно является непосредственным следствием теоремы, доказанной в разделе 2.1. Доказать теорему в другую сторону — значит обосновать T -равносоставленность двух произвольных многоугольников с совпадающими площадями и всеми мерами Хадвигера. Начнем с частного случая, когда рассматриваемые многоугольники являются прямоугольниками.

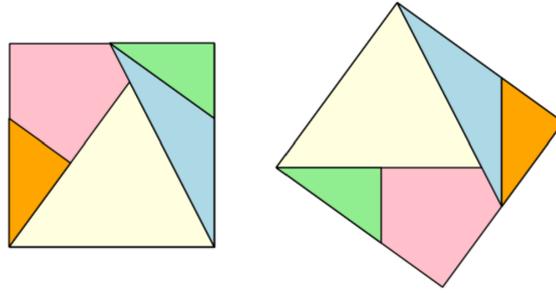


Рис. 5. Равносоставленность двух квадратов, отличающихся углом поворота, можно осуществить при помощи только параллельных переносов, без вращений.

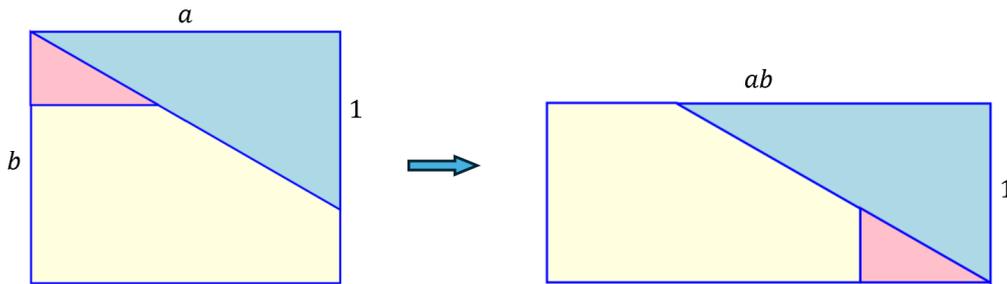


Рис. 6. Равносоставленность между прямоугольниками $R(b, a)$ и $R(ab, 1)$ при $b < a < 2b$.

Напомним лемму, доказанную в разделе 2.2: прямоугольник $R(a, b)$ равноставлен прямоугольнику $R(ab, 1)$ относительно группы сохраняющих ориентацию движений плоскости. Эту лемму можно усилить, сузив допустимую группу движений плоскости. Оказывается, можно говорить не только о равноставленности, но и о T -равноставленности. Пусть $b < a < 2b$. Тогда T -равноставленность между $R(b, a)$ и $R(ab, 1)$ выглядит так, как показано на рис. 6.

Ограничение $b < a < 2b$ не является очень существенным, поскольку T -равноставленность между $R(a, b)$ и $R(qa, q^{-1}b)$ при произвольном положительном $q \in \mathbb{Q}$ уже была установлена ранее. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма. *Прямоугольники $R(a, b)$ и $R(ab, 1)$ равноставлены относительно группы всех параллельных переносов.*

Кстати говоря, если скомбинировать эту лемму с доказательством теоремы Уоллеса–Бойяи–Гервина, то получится следующее усиление последней теоремы (это усиление тоже было получено Хадвигером и Глуром в 1951 году).

Теорема. *Если в качестве группы G допустимых движений плоскости взять группу, состоящую из всех параллельных переносов и всех центральных симметрий (поворотов на 180 градусов относительно всевозможных центров), то G -равноставленность многоугольников окажется равносильной совпадению площадей.*

Иными словами, для группы G из только что сформулированной теоремы, G -равноставленность равносильна равноставленности относительно полной группы движений плоскости. Например, правильный треугольник можно разрезать на несколько многоугольных кусков и составить из этих кусков квадрат той же площади. При этом куски разрешается только поворачивать на 180 градусов и параллельно сдвигать. На рис. 7 показана последовательность элементарных операций, переводящая равносторонний треугольник со стороной 1 и площадью $A = \sqrt{3}/4$ в квадрат той же площади. Сторона квадрата в этом случае имеет длину $a = \sqrt{A}$. Каждая операция состоит в отрезании от имеющейся

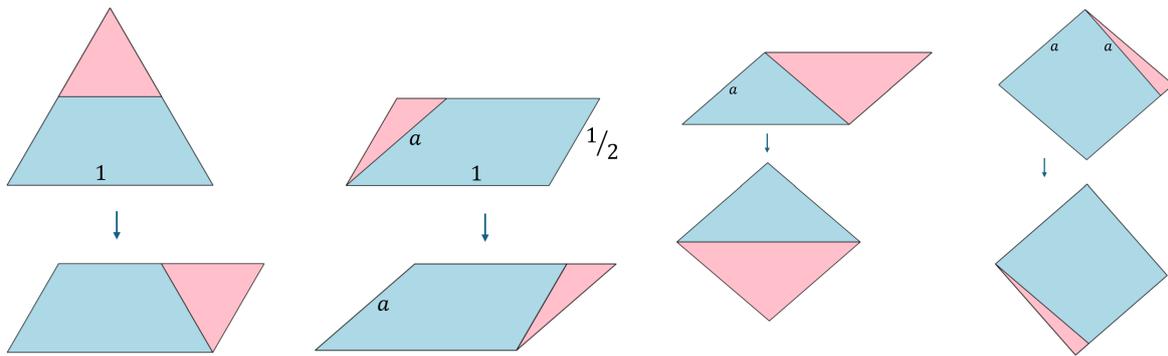


Рис. 7. Равносоставленность треугольника и квадрата

фигуры треугольника и приклеивании его копии с другой стороны; при этом копия отличается от оригинала либо параллельным переносом, либо поворотом на 180 градусов. Осуществимость всех указанных операций подтверждается элементарными неравенствами, например, второй столбец осуществим в силу неравенств $1/2 < a < 1$. Заметим, что все операции, кроме самой первой, осуществляются только параллельными переносами.

2.4. Трансляционная равносоставленность параллелограммов. В качестве подготовки к доказательству теоремы Хадвигера–Глура мы сначала установим T -равносоставленность любых двух параллелограммов одинаковой площади. Обозначим эти два параллелограмма через P и Q . Напомним, что все меры Хадвигера обращаются в нуль на любых параллелограммах, так что наше утверждение соответствует общей теореме Хадвигера–Глура и, в самом деле, является частным случаем этой общей теоремы.

Можно считать без ограничения общности, что обе фигуры P и Q имеют единичную площадь. Подходящим параллельным переносом можно добиться, чтобы одна из вершин параллелограмма P попала в точку 0 , то есть в начало координат. Если фиксировано начало координат, то точки можно отождествить с векторами, а именно, вектору \vec{v} будет соответствовать конец этого вектора, отложенного от начала координат. Вершинами параллелограмма будут точки 0 , \vec{u} , \vec{v} и $\vec{u} + \vec{v}$, для некоторых неколлинеарных векторов \vec{u} , \vec{v} . Будем описывать это положение дел такими словами: параллелограмм P *натянут* на векторы \vec{u} , \vec{v} . Параллелограмм, натянутый на \vec{u} и \vec{v} , обозначим через $\Pi(\vec{u}, \vec{v})$. Скажем, что два параллелограмма — *соседи*, если у них есть общее ребро.

Лемма. Пусть P и Q — два параллелограмма единичной площади с общей вершиной 0 . Тогда найдутся параллелограммы P_1 и P_2 единичной площади с вершиной 0 и следующими свойствами: каждая из пар (P, P_1) , (P_1, P_2) и (P_2, Q) является парой соседей.

Доказательство. Зафиксируем ребро параллелограмма P и неколлинеарное ему ребро параллелограмма Q . Обозначим направляющие векторы фиксированных ребер через \vec{u} и \vec{w} , соответственно. Ребра параллелограммов P и Q , параллельные векторам \vec{u} и \vec{w} , соответственно, но не содержащие точки 0 , пересекаются при продолжении в некоторой точке \vec{v}_1 , см. рис. 8. Этот вектор \vec{v}_1 , очевидно, удовлетворяет равенствам

$$\text{area} \Pi(\vec{u}, \vec{v}_1) = \text{area}(P) = \text{area}(Q) = \text{area} \Pi(\vec{w}, \vec{v}_1).$$

Теперь искомыми параллелограммами будут $P_1 = \Pi(\vec{u}, \vec{v}_1)$ и $P_2 = \Pi(\vec{w}, \vec{v}_1)$. \square

В силу доказанной леммы, достаточно установить трансляционную равносоставленность параллелограммов P и Q в том только случае, когда P и Q — соседи. Другими словами, они имеют общее ребро и одну и ту же высоту. Общее ребро будем называть *основанием*. Если P и Q находятся по разные стороны от основания, то есть лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей основание, то достаточно параллельно перенести один из параллелограммов таким образом, чтобы основание совпало с другой

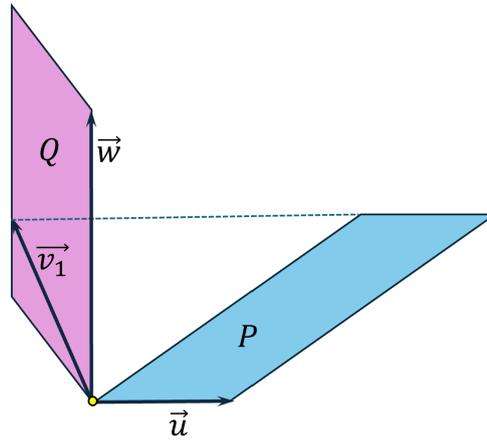


Рис. 8. Переход от P к Q через соседей P_1, P_2 .

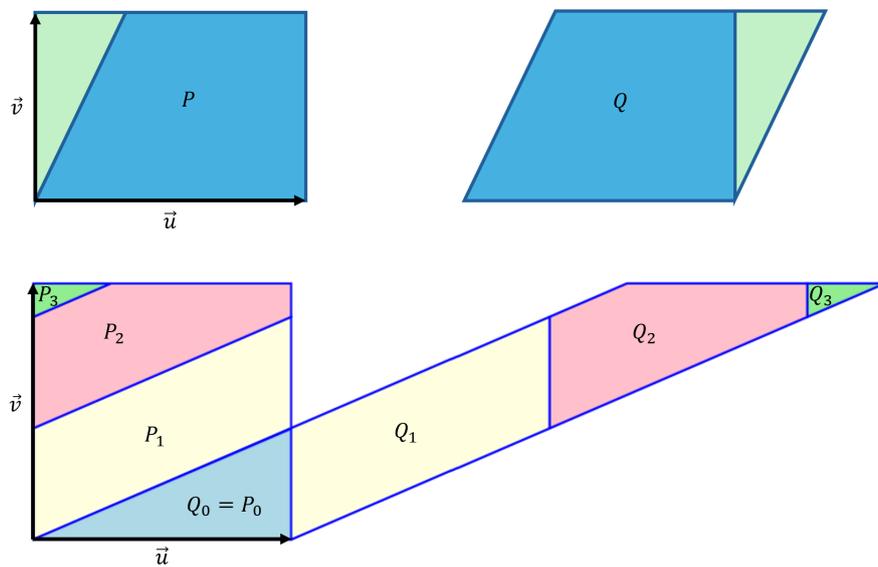


Рис. 9. Трансляционная равносоставленность между параллелограммами-сосеями P и Q . Сверху: простейший случай, когда достаточно переставить треугольник. Снизу: более общий случай, в котором Q требуется разрезать на куски Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 и перенести эти куски параллельно вдоль вектора \vec{u} , чтобы сложить из них P .

его стороной. После такого переноса обе фигуры окажутся по одну и ту же сторону от основания.

Как и раньше, мы считаем, что 0 — общая вершина у P и Q . Обозначим через \vec{u} другую общую вершину, а через \vec{v} — направляющий вектор другого ребра параллелограмма P (таким образом, $P = \Pi(\vec{u}, \vec{v})$). Простейший случай равносоставленности между такими P и Q показан на рис. 9 сверху. В этом случае достаточно отрезать от P треугольник и приставить его с другой стороны, то есть достаточно будет двух кусков. А в более общей ситуации нужно разрезать параллелограмм Q прямыми, параллельными вектору \vec{v} и проходящими через точки $t\vec{u}$, где t пробегает все целые числа. Этим кусков может быть очень много, если параллелограмм Q сильно вытянут. Каждый из полученных таким образом кусков следует перенести в P .

Более подробно: каждый кусок лежит в одной из сдвинутых копий параллелограмма P . Сдвигаем мы на векторы вида $t\vec{u}$. Если эту копию параллелограмма P параллельно перенести, совместив с P , то и содержащийся в данной копии кусок фигуры Q перенесется в

P . Чтобы установить равносоставленность многоугольников P и Q , достаточно проверить, что все перенесенные куски фигуры Q в точности составят фигуру P , без наложения.

Обозначим куски фигуры Q через Q_0, \dots, Q_{n-1} . Каждый кусок Q_i содержится в своей копии $i\vec{u} + P$ многоугольника P . Полагая $P_i = Q_i - i\vec{u}$, мы должны установить, что многоугольники P_i не имеют общих внутренних точек, и что все вместе они составляют параллелограмм P . Рассуждая от противного, допустим сначала, что у P_i и P_j (при $i \neq j$) нашлась общая внутренняя точка p . Тогда $p + i\vec{u} \in Q_i$ и $p + j\vec{u} \in Q_j$. С другой стороны, точки $p + i\vec{u}$ и $p + j\vec{u}$ обе попадают внутрь Q . Но они лежат на одной горизонтали на расстоянии, равном длине вектора \vec{u} , умноженной на $|i - j|$. Это противоречие.

Итак, у перенесенных кусков P_i нет общих внутренних точек, и все эти перенесенные куски лежат в P . С другой стороны, суммарная площадь кусков P_i равна суммарной площади кусков Q_i , то есть площади параллелограмма Q , которая, в свою очередь, совпадает с площадью параллелограмма P . Отсюда вытекает, что объединение кусков P_i составляет весь параллелограмм P , без каких-либо щелей. Тем самым трансляционная равносоставленность параллелограммов P и Q доказана в том случае, когда P и Q — соседи, а в силу приведенной выше леммы, и в общем случае.

Данное рассуждение, конечно, допускает непосредственное обобщение на произвольную размерность: два параллелепипеда в \mathbb{R}^d трансляционно равносоставлены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый объем. Заметим также, что, хотя численное значение объема зависит от выбора единицы измерения, утверждение о том, что два параллелепипеда имеют одинаковый объем, имеет смысл само по себе, и ни от чего не зависит.

2.5. Доказательство теоремы Хадвигера–Глура. Нам осталось установить, что если выпуклые многоугольники P и Q имеют одинаковую площадь и одинаковые значения меры Хадвигера (при любом выборе прямой L), то они трансляционно равносоставлены.

Проведем две непараллельные прямые, которые примем за оси координат. Вообще говоря, совершенно не обязательно, чтобы оси были перпендикулярны друг другу. Дело в том, что теория Хадвигера–Глура вообще не использует евклидовой структуры, то есть способа измерять углы и расстояния. Это теория по своей сути относится к *аффинной геометрии*, то есть использует лишь такие понятия как равенство или пропорциональность векторов и параллельность прямых. В аффинной геометрии можно отличить нулевой угол от ненулевого, но нельзя померить величину ненулевого угла. Что касается расстояний, то можно сравнить длины двух параллельных отрезков (сказать, какая из них больше и во сколько раз), но нельзя то же самое сделать для непараллельных отрезков. Так что говорить про углы и расстояния в связи с рассматриваемой задачей излишне. Однако, исключительно для удобства речи, мы будем считать, что координатные прямые расположены стандартным образом — одна прямая проходит горизонтально, а другая вертикально.

Координатным прямоугольником назовем такой прямоугольник, ребра которого параллельны осям координат. Мы будем также иметь дело с *координатными треугольниками* — это прямоугольные треугольники, у которых катеты параллельны координатным осям.

Лемма. *К любому треугольнику можно добавить не пересекающиеся с ним координатные прямоугольники таким образом, чтобы полученная фигура была T -равносоставлена объединению конечного числа координатных треугольников.*

Разумеется, несвязное объединение треугольника и координатных прямоугольников не является выпуклой фигурой. То же замечание относится и к объединению конечного числа координатных треугольников. Однако, даже для невыпуклых фигур T -равносоставленность имеет смысл. Заметим еще, что достаточно добавить один координатный прямоугольник, поскольку, согласно доказанному выше, любое число координатных прямоугольников равносоставленно с одним единственным координатным прямоугольником. Важно только, какую площадь требуется добавить в форме координатного прямоугольника.

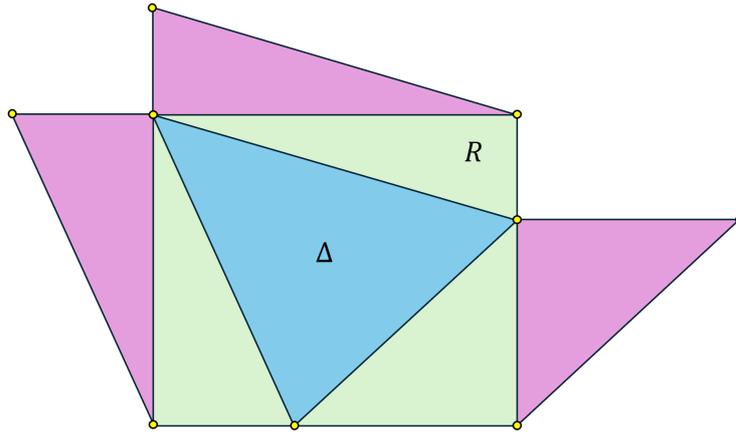


Рис. 10. Треугольник Δ плюс три параллелограмма, как на изображении — то же самое, что прямоугольник R плюс три координатных треугольника.

Доказательство. Обозначим имеющийся треугольник через Δ . Впишем его в прямоугольник R . Разницу между R и Δ составляют несколько (максимум три) координатных треугольников. Каждый из этих координатных треугольников можно дополнить другим координатным треугольником до параллелограмма, см. рис. 10. Таким образом, получаем картинку, в которой виден прямоугольник R и торчащие наружу координатные треугольники. Значит, полученная конфигурация — это R плюс координатные треугольники (торчащие наружу). Сам прямоугольник R , конечно, тоже можно представить в виде объединения двух координатных треугольников, не имеющих общих внутренних точек. С другой стороны, та же фигура — это Δ плюс параллелограммы, а последние равносоставлены с координатными прямоугольниками. \square

Следующая лемма позволяет свести многоугольник P к куче, состоящей из координатных прямоугольников и координатных треугольников. Работать с этой кучей нам будет проще, чем с одним многоугольником.

Лемма. *Всякий выпуклый многоугольник трансляционно равносоставлен с набором координатных прямоугольников и координатных треугольников.*

Неважно, где эти прямоугольники и треугольники расположены, поскольку в нашем распоряжении имеются произвольные параллельные переносы. С формальной точки зрения, нужно только потребовать, чтобы эти фигуры не перекрывались.

Доказательство. Проведем рассуждение для выпуклого многоугольника P . Разрезав его при помощи достаточно мелкой квадратной сетки, линии которой параллельны координатным осям, можно львиную долю площади многоугольника P представить в форме координатных прямоугольников. Оставшуюся часть разрежем на мелкие треугольники. Воспользовавшись леммой, заменим эти треугольники координатными. Каждый треугольник при этом даст один или несколько, максимум три, координатных треугольника, и нам может потребоваться имеющийся «бассейн» прямоугольной площади для снабжения треугольников необходимыми ингредиентами. Этого бассейна точно хватит. \square

Посмотрим, чего мы достигли к настоящему моменту. У нас теперь в искомом соотношении $P \simeq_T Q$ как в левой части, так и в правой части лежит куча координатных треугольников и прямоугольников. В целом понятно, что с прямоугольниками проблем нет, и нужно разбираться главным образом с треугольниками. А у координатного треугольника есть только одно ребро, а именно, гипотенуза, не параллельное координатным осям.

Имеется конечное число направлений, в которых расположены гипотенузы координатных треугольников, будь то из левой кучи или из правой. Возьмем одну из этих прямых,

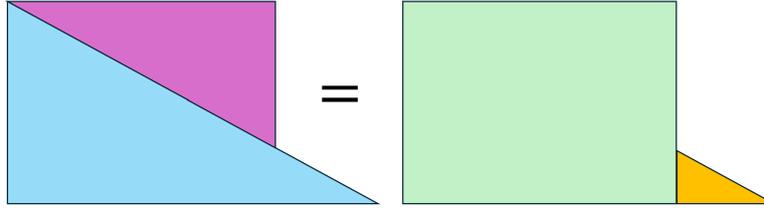


Рис. 11. Два координатных треугольника со значениями меры μ_L разных знаков дают координатный прямоугольник и один, меньшего размера, координатный треугольник.

назовем ее L , и зафиксируем у нее ко-ориентацию. Если в одной из двух куч, скажем, в левой, имеются треугольники со значениями инварианта μ_L разных знаков, то мы поступим следующим образом. Пусть Δ_1, Δ_2 — такие два координатных треугольника из левой кучи, гипотенузы которых параллельны прямой L , но при этом сами треугольники расположены по разные стороны от своих гипотенуз. Допустим, что $\mu_L(\Delta_1)$ положительно и при этом больше, чем абсолютная величина отрицательной меры $\mu_L(\Delta_2)$. От треугольника Δ_1 можно отщепить треугольник с длиной гипотенузы $|\mu_L(\Delta_2)|$, а оставшуюся трапецию разрезать на координатный треугольник с гипотенузой

$$\mu_L(\Delta_1) + \mu_L(\Delta_2) = \mu_L(\Delta_1) - |\mu_L(\Delta_2)| > 0$$

и координатный прямоугольник, см. рис. 11. В левой куче станет одним прямоугольником больше и одним треугольником меньше. Этой операцией, применяя ее многократно при необходимости, можно добиться того, чтобы все значения меры μ_L для треугольников данной кучи имели один и тот же знак. Так можно поступить с обеими кучами и для каждой прямой L . Будем с настоящего момента считать, что все эти подготовительные операции уже проделаны.

Опять выберем и зафиксируем коориентированную прямую L . Как в левой куче, так и в правой куче имеется некоторое количество координатных треугольников с ненулевым значением меры μ_L , при этом (в силу предыдущего шага) все эти значения одного знака. Значения в левой куче одного знака, и в правой куче одного знака, а поскольку мера μ_L левой кучи совпадает с соответствующей мерой правой кучи, то все эти значения,неважно, справа или слева, одного знака. Меняя, при необходимости, коориентацию у L , сделаем так, чтобы все значения меры μ_L были положительны. Возьмем теперь два треугольника с ненулевыми значениями μ_L из разных куч, скажем, Δ_1 слева и Δ_2 справа. Без ограничения общности, предположим, что $\mu_L(\Delta_1) > \mu_L(\Delta_2)$. Тогда, как и выше, можно от Δ_1 отщепить параллельно перенесенную копию треугольника Δ_2 . Останется прямоугольник и еще один треугольник с меньшим значением меры μ_L . Поскольку в двух кучах теперь образовалось по копии треугольника Δ_1 , и поскольку эти копии отличаются лишь параллельным переносом, можно эти копии удалить из обеих куч. Точнее говоря, если доказать, что оставшиеся кучи T -равносоставлены, то и исходные кучи (в которых присутствуют копии треугольника Δ_1) тоже будут T -равносоставлены по очевидным причинам. Этими операциями мы можем уменьшать число треугольников в обеих кучах; за числом прямоугольников мы следить не станем. Рассуждая по индукции, можно свести все к случаю, когда ни в одной из куч вообще никаких треугольников не останется, а будут только прямоугольники.

Итак, у нас теперь как левая куча, так и правая куча, состоит только из прямоугольников. При этом суммарная площадь прямоугольников левой кучи совпадает с суммарной площадью прямоугольников правой кучи. Как мы уже доказали, любой прямоугольник каждой из куч T -равносоставлен координатному прямоугольнику вида $R(a, 1)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Составляя вместе такие прямоугольники, получаем, что вся левая куча T -равносоставлена с $R(s, 1)$, где s — суммарная площадь левой кучи. То же самое можно

сказать про правую кучу. А значит, равноставленность двух куч при помощи параллельных переносов установлена.

Доказательство теоремы Хадвигера–Глура тем самым завершено. Обратите внимание на следующее обстоятельство. Если две прямые, выбранные в качестве координатных осей, обозначить через L_1 и L_2 , то мы в приведенном выше доказательстве ни разу не пользовались тем, что $\mu_{L_i}(P) = \mu_{L_i}(Q)$ при $i = 1, 2$. Получаем такое следствие.

Следствие. Пусть многоугольники P и Q имеют одинаковые площади, а также удовлетворяют соотношениям $\mu_L(P) = \mu_L(Q)$ для всех прямых L , кроме, возможно, двух прямых L_1, L_2 , пересекающихся по точке. В этом случае автоматически выполнены равенства $\mu_{L_i}(P) = \mu_{L_i}(Q)$ также и при $i = 1, 2$.

2.6. Инварианты Дена. В этом разделе мы рассмотрим задачу равноставленности для выпуклых многогранников в \mathbb{R}^3 относительно группы всех сохраняющих ориентацию движений пространства (или относительно всех движений вообще — результат будет тот же самый). Эта задача была поставлена Давидом Гильбертом⁹ в его знаменитой лекции на международном математическом конгрессе 1900 года, и известна как *третья проблема Гильберта*. Точнее говоря, вопрос Гильберта состоял в том, существуют ли неравноставленные многогранники одинакового объема. Сам Гильберт предполагал отрицательный ответ, и соответствующий контрпример в скоросте был получен учеником Гильберта Максом Деном.¹⁰ Оказывается, куб не является равноставленным с правильным тетраэдром того же объема. Но как это доказать? Для этого опять можно воспользоваться фактом, установленным в разделе 2.1, а именно, что у равноставленных фигур совпадают значения всех простых инвариантных (относительно группы всех движений) мер. Итак, достаточно придумать такую простую инвариантную меру на многогранниках, значения которой способны отличить куб от правильного тетраэдра — именно это и осуществил Ден в 1901 году. Меры, придуманные Деном, называются *инвариантами Дена*.

Чтобы определить инварианты Дена, мы для начала зафиксируем некоторую аддитивную функцию $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такую, что $\xi(\pi) = 0$. Великое множество таких функций можно построить следующим способом: дополним множество $\{\pi\}$ до базиса пространства \mathbb{R} над \mathbb{Q} , и зададим ξ произвольным образом на базисных векторах, с единственным ограничением, а именно, на базисном векторе π функция должна принимать значение 0. Как мы знаем, любая функция на базисе единственным образом продолжается по линейности на все пространство \mathbb{R} .

Определение (Инварианты Дена). Рассмотрим выпуклый многогранник P в \mathbb{R}^3 . *Инвариантом Дена* многогранника P называется величина

$$D(P) := \sum_e \text{Len}(e) \xi(\theta_e).$$

Здесь суммирование производится по всем ребрам e многогранника P , число $\text{Len}(e)$ выражает длину ребра e , а число θ_e — это двугранный угол многогранника P при данном ребре e .

Мы видим, что инвариант Дена зависит от выбора аддитивной функции ξ . Сколько аддитивных функций (а их очень много!), столько и инвариантов Дена. Впрочем, совершенно неважно, каким образом функция ξ определена за пределами конечномерного пространства над \mathbb{Q} , порожденного π и мерами всех двугранных углов многогранника P .

⁹Давид Гильберт (1862–1943) — признанный лидер математики рубежа XIX–XX вв. В своей лекции на втором Международном Конгрессе Математиков в Париже представил список из 23 задач, решения которых заложили фундамент многих современных научных областей.

¹⁰Макс Ден (1878–1952) — немецкий и американский математик, известный своими работами в топологии и геометрической теории групп. В 1935 году был вынужден уволиться из университета Франкфурта из-за своего еврейского происхождения и, через Данию и Норвегию, эмигрировать в США. Последнее место работы — колледж Блэк Маунтин (Северная Каролина), где он был единственным математиком.

Так что фактически для вычисления инварианта Дена нужно знать ограничение функции ξ на конечномерное пространство над \mathbb{Q} ; пространство всех таких ограничений тоже конечномерно.

Докажем, что инвариант Дена является простой мерой. Как мы уже знаем, для этого достаточно проверить аддитивность при разрезании; этот факт был установлен в разделе 1.5. Пусть многогранник P разрезан некоторой плоскостью на два многогранника P_+ и P_- , причем оба полученных куска имеют непустые внутренности. Будем считать, что разрезающая плоскость не содержит ни одного ребра многогранника P ; если это не так, то приводимое ниже рассуждение нуждается в незначительной модификации — эта модификация предоставляется читателю. Мы хотим проверить, что $D(P) = D(P_+) + D(P_-)$. Члены левой части искомого равенства соответствуют ребрам многогранника P . Любое ребро многогранника P либо лежит целиком в P_+ , либо целиком в P_- , либо разбивается плоскостью разреза на две части. Если ребро e многогранника P целиком лежит, скажем, в P_+ , то соответствующие члены в левой и правой частях равенства полностью совпадают. Так что интересен только тот случай, когда e разбивается плоскостью разреза на две части $e_{\pm} := e \cap P_{\pm}$. В этом случае левая часть искомого равенства содержит член $\text{Len}(e)\xi(\theta_e)$, а в правой части возникнет сумма $\text{Len}(e_+)\xi(\theta_e) + \text{Len}(e_-)\xi(\theta_e)$. Эти две вещи — то, что связано с ребром e в левой части и то, что связано с этим же ребром в правой части — в точности равны, в силу аддитивности длины. Наконец, в правой части могут возникнуть «лишние» ребра, которых нет в левой части — эти ребра получаются как пересечения граней многогранника P с плоскостью разреза. С каждым таким ребром e связано два двугранных угла θ_{\pm} , которые принадлежат многогранникам P_{\pm} , соответственно. При этом важно, что $\theta_- + \theta_+ = \pi$. Отсюда и из условия $\xi(\pi) = 0$ вытекает, что соответствующие члены в правой части искомого равенства взаимно уничтожаются. Мы доказали, что инвариант Дена аддитивен при разрезании, а значит, является простой мерой. Инвариантность этой меры при всех движениях очевидно — ни длины ребер, ни величины двугранных углов, не меняются при движениях.

Наконец, мы готовы доказать теорему Дена.

Теорема. *Куб с ребром единичной длины не равносоставлен правильному тетраэдру того же объема.*

Доказательство. Достаточно сравнить инварианты Дена и предъявить такой инвариант, который не обращался бы в нуль на тетраэдре. На кубе, как легко видеть, все инварианты Дена обращаются в нуль.

Мы хотим прежде всего вычислить двугранные углы правильного тетраэдра. Это удобно сделать с помощью следующего трюка. Вложим трехмерный правильный тетраэдр Δ в четырехмерное пространство как выпуклую оболочку концов всех координатных векторов из некоторого ортонормального базиса. Более подробно: рассмотрим в \mathbb{R}^4 четверку векторов e_0, \dots, e_3 единичной длины, попарно ортогональных друг другу. Тетраэдр Δ можно реализовать как тетраэдр с вершинами в e_0, \dots, e_3 . Разумеется все двугранные углы у Δ равны друг другу, так что достаточно посчитать двугранный угол при ребре $[e_0; e_1]$, соединяющем вершины e_0 и e_1 . Этот двугранный угол равен углу с вершиной в точке $(e_0 + e_1)/2$ (середине рассматриваемого ребра), лучи которого выходят из этой точки и проходят через e_3 и e_4 . Другими словами, нас интересует угол между векторами

$$u = e_3 - \frac{1}{2}(e_0 + e_1) \quad \text{и} \quad v = e_4 - \frac{1}{2}(e_0 + e_1).$$

Скалярное произведение векторов u и v равно $1/2$ (оно может быть посчитано пользуясь билинейностью скалярного произведения, а также тем фактом, что скалярное произведение векторов e_i и e_j равно единице или нулю в зависимости от того $i = j$ или $i \neq j$). А длина каждого из векторов u и v равна $\sqrt{3}/2$. Отсюда вытекает, что косинус угла между

u и v равен

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{1/2}{\sqrt{3/2}\sqrt{3/2}} = \frac{1}{3}.$$

Если двугранный угол θ тетраэдра Δ , то есть угол между u и v , значение которого найдено выше и равно $\arccos \frac{1}{3}$, нельзя представить в виде $q\pi$ при $q \in \mathbb{Q}$, то найдется аддитивная функция ξ , такая, что $\xi(\pi) = 0$, но при этом $\xi(\theta) \neq 0$. Отсюда следует, что $D(\Delta) \neq 0$. В самом деле, $D(\Delta)$ получается как шестикратное произведение длины ребра тетраэдра Δ на $\xi(\theta)$.

Итак, осталось доказать, что $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$. Для этого посчитаем значение косинуса $\cos m\theta$ при всех целых m , пользуясь рекуррентным соотношением

$$\cos(m+1)\theta = -\cos(m-1)\theta + \frac{1}{3}\cos m\theta, \quad \cos 0 = 1, \quad \cos \theta = \frac{1}{3}.$$

Вот значения $\cos m\theta$ для нескольких первых неотрицательных целых m , посчитанные при помощи выписанного рекуррентного соотношения (с использованием указанного справа начального условия):

$$\cos 2\theta = -1 + \frac{1}{9} = -\frac{8}{9}, \quad \cos 3\theta = -\frac{1}{3} - \frac{8}{27} = -\frac{17}{27}, \quad \dots$$

Представим $\cos m\theta$ как отношение a_m/b_m двух целых чисел. При этом можно считать, что $b_m > 0$ и что a_m взаимно просто с b_m , то есть что дробь несократима. Начальные условия для a_m и b_m состоят в том, что $(a_0, b_0) = (1, 1)$ и $(a_1, b_1) = (1, 3)$. Теперь найденное выше рекуррентное соотношение выглядит как

$$\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} = -\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a_m}{b_m} = \frac{-3a_{m-1}(b_m/b_{m-1}) + a_m}{3b_m}.$$

Допустим (это будут предположения индукции), что, во-первых, b_m является степенью тройки, во-вторых, b_m делится на b_{m-1} и, в-третьих, a_m не делится на три. Выписанная выше формула в этом случае говорит о том, что a_{m+1} и b_{m+1} совпадают с числителем и знаменателем выписанной в правой части дроби, при этом $b_{m+1} = 3b_m$ (а значит, b_{m+1} тоже является степенью тройки и делится на b_m) и a_{m+1} сравнимо с a_m по модулю три (а стало быть, тоже не делится на три). Мы тем самым установили, что рациональное число $\cos m\theta$ отлично от ± 1 для всех $m > 0$, так как его знаменатель делится на три, а числитель нет. Однако, если бы θ имело вид $\frac{n}{m}\pi$ для целых $n, m > 0$, то выполнялось бы равенство $\cos m\theta = \pm 1$, противоречие. \square

Развитие сюжета о равносторонности многогранников можно найти в замечательных классических книгах [3, 9]; про более современные результаты и направления см. [6].

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

Теперь мы обсудим динамические версии рассмотренных выше мер. Начнем с описания динамических объектов, к которым эти меры будут применяться. Вообще, *динамическими системами* называют такие системы, которые изменяются со временем по одному и тому же, фиксированному раз и навсегда, закону. Это описание не является точным определением, поскольку нужно уточнить, что такое «время» и что такое «закон изменения». Простейший вариант — дискретное время, которое может принимать только целые, или даже только целые неотрицательные, значения. Скажем, состояния системы можно измерять только через целое число секунд, минут или лет. Закон изменения — это отображение множества X состояний системы в себя. Если в момент времени n система находилась в состоянии x , то в следующий момент времени $n+1$ она будет находиться в состоянии $f(x)$. Ко всем состояниям $x \in X$ применяется одно и то же отображение f — это формализация представления о неизменности закона изменения системы. Иногда хочется проследить всю

последовательность состояний, через которые данная система проходит с течением времени, то есть последовательность

$$x, f(x), f^2(x) := f(f(x)), \dots, f^{n+1}(x) := f(f^n(x)), \dots,$$

называемую *орбитой* точки x под действием отображения f . Как ведет себя орбита — приближается ли она к периодическому режиму или демонстрирует хаотическое поведение? Как поведение орбит зависит от выбора начальной точки x или даже отображения f ? Это основные вопросы теории динамических систем.

3.1. Перекладывания отрезков. Рассмотрим отрезок $I = [a; b]$ на числовой прямой, и разрежем его на конечное число подотрезков. Это значит, что мы выберем точки

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

и получим подотрезки $I_i = [a_i; a_{i+1}]$ для всех $i = 0, \dots, n-1$. Полученные таким образом подотрезки покрывают весь I , и не имеют общих точек, за исключением, возможно, общих концов. Допустим, что выбрано другое разбиение

$$a = b_0 < b_1 < \dots < b_{n-1} < b_n = b$$

того же отрезка. Обозначим через J_j подотрезок $[b_j; b_{j+1}]$ при $j = 0, \dots, n-1$. Заметим, что оба подразбиения отрезка I состоят из одинакового числа кусков (а именно, n); а отрезки подразбиения в обоих случаях занумерованы элементами множества $\bar{n} := \{0, \dots, n-1\}$. Напомним, что *перестановка* некоторого множества — это биекция из множества на себя. Множество всех перестановок данного множества образует группу. Конкретно для множества \bar{n} соответствующая группа перестановок обозначается через S_n и называется *симметрической группой* на n элементах. Выберем перестановку $\pi \in S_n$ и предположим (это сильное предположение, создающее существенное ограничение на выбор подразбиений), что отрезки I_i и $J_{\pi(i)}$ имеют одинаковые длины для всех $i \in \bar{n}$.

Определение (Перекладывание отрезка). При сделанных предположениях можно определить параллельный перенос $f_i : I_i \rightarrow J_{\pi(i)}$ формулой $f(x) = x + b_{\pi(i)} - a_i$, и этот перенос будет переводить отрезок I_i в точности в отрезок $J_{\pi(i)}$. Далее, из этих параллельных переносов можно составить одно отображение f , определенное на всем I , за исключением концов отрезков подразбиения. Конечно, при желании, можно составить и всюду определенное преобразование, например, заменив отрезок $[a; b]$ полуинтервалом $[a; b)$, и аналогично для каждого подотрезка каждого из двух подразбиений. Впрочем, это не очень важно: если переопределить отображение f в конечном числе точек, то никакие существенные вещи не поменяются. Мы будем систематически игнорировать разницу между двумя перекладываниями, если эта разница проявляется только в конечном числе точек. Определенное только что отображение f называется *отображением перекладывания отрезка I* (или просто *перекладыванием отрезка*). Перекладывание, таким образом, определяется перестановкой π и набором длин $(\text{Len}(I_0), \dots, \text{Len}(I_{n-1}))$.

Все перекладывания данного отрезка I образуют группу в том смысле, что композиция двух перекладываний — снова перекладывание, и отображение, обратное к перекладыванию — опять перекладывание.

Задача. Докажите только что сформулированные утверждения. Пусть f — перекладывание, заданное перестановкой $\pi^f \in \bar{n}$ и набором длин $(\lambda_0^f, \dots, \lambda_{n-1}^f)$ соответствующих подотрезков, а g — перекладывание, заданное перестановкой $\pi^g \in \bar{m}$ и набором длин $(\lambda_0^g, \dots, \lambda_{m-1}^g)$ соответствующих подотрезков. Как задается композиция $g \circ f$? (Если ответ покажется слишком длинным и не слишком вразумительным, это ничего страшного — главное, чтобы он содержал четкие указания.)

Группу всех перекладываний отрезка I будем обозначать через $\text{IET}(I)$ (здесь IET — аббревиатура от Interval Exchange Transformation). Мы будем рассматривать перекладывания отрезка I с точки зрения теории динамических систем. Другими словами, для данного

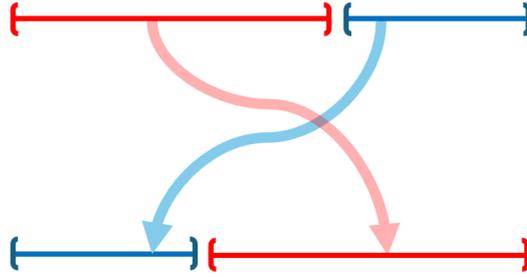


Рис. 12. Перекладывание двух отрезков.

перекладывания $f \in \text{IET}(I)$ нас будут интересовать его итерации f^n , в частности, сколько отрезков нужно переложить, чтобы получить f^n . Например, бывает так, что $f^n = id$, то есть все переложенные отрезки рано или поздно возвращаются на место, возможно, в форме более мелких подотрезков. В этом случае перекладывание f называется *периодическим*. Отметим на всякий случай, но в самый последний раз: равенство $f^n = id$ вовсе не предполагает, что отображение f^n всюду определено; оно может быть не определено в конечном числе точек, но во всех остальных точках оно обязано совпадать с тождественным отображением. Простейший вопрос про динамику отображения f — это вопрос о том, является ли данное отображение периодическим. Разумеется, в случае отрицательного ответа на этот первый вопрос возникает целый ряд более тонких вопросов.

Пример (Перестановка отрезков одинаковой длины). Допустим, что мы разбили отрезок I на n подотрезков равной длины. Тогда любая перестановка $\pi \in S_n$ приводит к периодическому перекладыванию. В самом деле, $\pi^k = id$ для некоторого натурального k (иначе в последовательности перестановок id, π, π^2, \dots нет повторяющихся, а это противоречит тому, что S_n состоит из конечного числа элементов, а именно, имеет мощность $n!$). Для этого же k имеем $f^k = id$.

Пример (Вращение окружности). Приведем теперь пример непериодического перекладывания. Это отображение $f(x) = \{x + \alpha\}$ полуинтервала $[0; 1)$ в себя. Здесь $\{y\}$ обозначает дробную часть действительного числа y , то есть такое число из полуинтервала $[0; 1)$, что $y - \{y\} \in \mathbb{Z}$. Если действительное число α иррационально, то отображение f , как нетрудно видеть, не является периодическим. С другой стороны, отображение f является перекладыванием двух отрезков (точнее, полуинтервалов, но это неважно), а именно, полуинтервал $[0; 1 - \alpha)$ отображается в $[\alpha; 1)$ параллельным переносом на α , а полуинтервал $[1 - \alpha; 1)$ отображается в $[0; \alpha)$ параллельным переносом на $\alpha - 1$. См. рис. 12. Рассматриваемое перекладывание допускает геометрическую интерпретацию. А именно, если окружность длины 1 разрезать в одной точке, то как раз получится полуинтервал $[0; 1)$, а вращение окружности на угол α (здесь мы нормируем угол таким образом, чтобы полный угол был равен единице, а не 2π) в точности соответствует отображению f .

3.2. Инварианты SAF. В этом разделе мы обсудим инварианты перекладывания отрезков, рассмотренные Са, Арну и Фати; по этой причине их называют *инвариантами Са-Арну-Фати*, или *инвариантами SAF*. Инвариант SAF будет зависеть от выбора аддитивной функции $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Он представляет из себя число $\text{Inv}_\xi(f)$, сопоставляемое каждому перекладыванию $f \in \text{IET}(I)$. Другими словами, Inv_ξ — отображение из группы $\text{IET}(I)$ в группу всех действительных чисел по сложению. Главное свойство инварианта состоит в том, что

$$\text{Inv}_\xi(f \circ g) = \text{Inv}_\xi(f) + \text{Inv}_\xi(g).$$

Чтобы выразить это свойство словами, говорят, что Inv_ξ представляет из себя *гомоморфизм* группы $\text{IET}(I)$ в группу \mathbb{R} по сложению. Начнем с определения.

Определение (Инвариант SAF). Рассмотрим перекладывание $f : \text{IET}(I)$, которое каждый из подотрезков I_i некоторого конечного подразделения отрезка I сдвигает на v_i , то есть $f(x) = x + v_i$ при $x \in I_i$ (кроме, возможно, концов подотрезка I_i). Инвариант SAF для f определяется следующей формулой:

$$\text{Inv}_\xi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Len}(I_i)\xi(v_i).$$

Заметим, что если перейти к более мелкому подразбиению отрезка I , то есть каждый из кусков I_i дополнительно подразбить на более мелкие кусочки I_{i0}, \dots, I_{in_i} , то, во-первых, перекладывание f можно описать как перекладывание этих мелких кусочков I_{ij} , а во-вторых, значение инварианта $\text{Inv}_\xi(f)$, вычисленное по более мелкому разбиению, совпадает со значением, вычисленным по крупному разбиению. В самом деле,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n_i} \text{Len}(I_{ij})\xi(v_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Len}(I_i)\xi(v_i),$$

по свойству аддитивности длины.

Теперь нужно доказать, что инвариант композиции двух перекладываний равен сумме инвариантов. Рассмотрим два перекладывания $f, g \in \text{IET}(I)$. Переходя, при необходимости, к более мелким подразделениям, будем считать, что f сдвигает каждый отрезок I_i некоторого подразделения на v_i , а отображение g сдвигает образ $f(I_i)$ на w_i . Композиция $g \circ f$ тем самым сдвигает каждый I_i на $v_i + w_i$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \text{Inv}_\xi(g \circ f) &= \sum_i \text{Len}(I_i)\xi(v_i + w_i) = \sum_i \text{Len}(I_i)\xi(v_i) + \sum_i \text{Len}(I_i)\xi(w_i) = \\ &= \sum_i \text{Len}(I_i)\xi(v_i) + \sum_i \text{Len}(f(I_i))\xi(w_i) = \text{Inv}_\xi(f) + \text{Inv}_\xi(g). \end{aligned}$$

В первом и последнем равенствах мы воспользовались определением инварианта, во втором равенстве — аддитивностью функции ξ , в третьем равенстве — тем, что отрезки I_i и $f(I_i)$ имеют одинаковые длины. Итак, аддитивность инварианта относительно композиции доказана. Отметим следующее следствие.

Следствие. Если $\text{Inv}_\xi(f) \neq 0$, то перекладывание $f \in \text{IET}(I)$ не может быть периодическим.

Доказательство. В самом деле, если бы равенство $f^n = id$ выполнялось для $n > 0$, то, вычисляя инвариант у обеих частей этого равенства, получим, что $n \text{Inv}_\xi(f) = 0$, откуда немедленно вытекает, что $\text{Inv}_\xi(f) = 0$. \square

К сожалению, если взять самую простую аддитивную функцию ξ , а именно, линейную функцию $\xi(x) = \lambda x$, то полученный инвариант будет принимать нулевые значения на всех перекладываниях. Таким образом, разрывные аддитивные функции в этой задаче возникают по делу, без них просто не обойтись. Чтобы убедиться в справедливости сформулированного утверждения, а именно, что $\text{Inv}_{\xi_0} \equiv 0$ для $\xi_0(x) = x$, достаточно посчитать двумя способами величину сдвига, которому должен подвергнуться центр масс отрезка. Будем считать, что плотность равномерная (скажем, равная единице, то есть масса любого подотрезка совпадает с его длиной), и, стало быть, центр масс отрезка находится посередине. С одной стороны, отрезок в целом после применения отображения f остался на месте (хотя какие-то его части и поменяли свое расположение), и поэтому центр масс тоже должен остаться на месте. С другой стороны, каждый из подотрезков I_i сдвинется на v_i , следовательно, центр масс сдвинется на $\sum_i \text{Len}(I_i)v_i$, то есть ровно на величину $\text{Inv}_{\xi_0}(f)$. Это вытекает из такого свойства центра масс: чтобы локализовать центр масс всего отрезка, можно найти центры масс у всех кусков I_i , а потом вычислить центр масс полученной конечной системы точек — точками служат центры масс подотрезков, а их массы равны массам, т.е. длинам, этих подотрезков.

Задача. Для любого $f \in \text{IET}(I)$ и любой аддитивной функции ξ , инвариант $\text{Inv}_\xi(f)$ можно представить в виде суммы членов вида

$$\det \begin{pmatrix} x & y \\ \xi(x) & \xi(y) \end{pmatrix} = x\xi(y) - y\xi(x)$$

для некоторых пар действительных чисел $x, y \in \mathbb{R}$. Проверьте это утверждение, а заодно решите вопрос о том, как получить эти самые пары (x, y) по перекладыванию. Отсюда еще раз вытекает, что $\text{Inv}_{\xi_0}(f) = 0$.

Дальше стоит разобрать несколько примеров.

Пример (Рациональное перекладывание). Пусть $I = [0; 1]$, а разбиение отрезка I таково, что все концы всех отрезков подразделения являются рациональными числами. Если f — перекладывание отрезка I , совпадающее на каждом из отрезков I_i данного подразделения со сдвигом на некоторое действительное число v_i , то как длины отрезков I_i , так и величины сдвигов v_i рациональны. Из общих соображений ясно, что так определенное перекладывание f является периодическим. В самом деле, приведем все узлы разбиения к общему знаменателю N и измельчим разбиение таким образом, чтобы в качестве узлов встречались все подряд рациональные числа вида k/N при $k = 0, \dots, 1$. Теперь f просто осуществляет некоторую перестановку полученных N отрезков длины $1/N$, и поэтому некоторая итерация отображения f тождественна (можно даже заведомо утверждать, что $f^{N!} = id$ — подумайте, почему). С другой стороны, можно посчитать инвариант $\text{Inv}_\xi(f)$ и, независимо от предыдущего рассуждения, убедиться в том, что инвариант обращается в нуль. Имеем:

$$\text{Inv}_\xi(f) = \sum_i \text{Len}(I_i)\xi(v_i) = \sum_i \text{Len}(I_i)v_i\xi(1) = \text{Inv}_{\xi_0}(f)\xi(1) = 0.$$

Первое равенство — это определение инварианта SAF, второе равенство следует из аддитивности функции ξ (вспомним, что аддитивная функция непременно является линейной над \mathbb{Q}), а третье равенство — это установленный выше факт, что для линейной над \mathbb{R} функции ξ_0 инвариант SAF тождественно нулевой.

Следующий пример показывает, что инвариант SAF не всегда равен нулю. Это, в свою очередь, доказывает содержательность и осмысленность введенного инварианта.

Пример (Иррациональный поворот окружности). Рассмотрим теперь перекладывание вида $f(x) = \{x + \alpha\}$ при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Установим существование такого инварианта SAF, который принимает ненулевое значение на отображении f . Сначала посчитаем $\text{Inv}_\xi(f)$ не уточняя ξ :

$$\text{Inv}_\xi(f) = (1 - \alpha)\xi(\alpha) + \alpha\xi(\alpha - 1) = \xi(\alpha) - \alpha\xi(1).$$

Поскольку число α иррационально, можно подобрать такую аддитивную функцию ξ , для которой $\xi(1) = 0$ и $\xi(\alpha) = 1$. Для такой функции ξ соответствующий инвариант принимает значение 1.

Пример (Непериодическое перекладывание с нулевым инвариантом). Рассмотрим две окружности, одну из которых будем вращать против часовой стрелки, а другую — по. Если разрезать обе окружности, можно получить два полуинтервала, и потом сложить их вместе, получив один полуинтервал. Поэтому рассматриваемую динамическую систему — отображение из объединения двух непересекающихся окружностей в себя — можно рассматривать как отображение одного полуинтервала в себя, определенное всюду кроме конечного числа точек. Это — перекладывание отрезков. А если окружности имели одинаковую длину, и углы вращения отличались только знаком, то полученное перекладывание будет иметь нулевой инвариант SAF, при любом выборе аддитивной функции ξ . В самом деле, полный инвариант является суммой двух инвариантов, посчитанных для каждой из окружностей отдельно, а эти два инварианта тоже отличаются только знаком.

С другой стороны, если углы вращения иррациональны, то рассматриваемое отображение не является периодическим. Мы видим, что существуют непериодические перекладывания отрезков, для которых все инварианты SAF обращаются в нуль. Другими словами, равенство $\text{Inv}_\xi(f) = 0$ для любой аддитивной функции ξ является необходимым, но не достаточным условием периодичности перекладывания f .

Пример (Перекладывание трех отрезков). Пусть a, b, c — положительные числа, в сумме дающие единицу. Тогда единичный отрезок $I = [0; 1]$ можно разбить на три подотрезка длин a, b, c (в таком порядке слева направо). Перекладывание f определим таким образом, чтобы оно сдвигало самый левый отрезок на самую правую позицию, а самый правый отрезок — на самую левую позицию. Иначе говоря, после перекладывания получатся три отрезка длин c, b, a в таком порядке слева направо. Заметьте, что отрезок длины b , вообще говоря, не останется на месте, а сдвинется на $c - a$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\text{Inv}_\xi(f) = \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ \xi(a) & \xi(1) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c & a \\ \xi(c) & \xi(a) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & c \\ \xi(1) & \xi(c) \end{pmatrix}.$$

Из этой формулы уже исключена величина b при помощи равенства $a + b + c = 1$. Посмотрим, при каких условиях на a и c инвариант обращается в нуль при всех ξ . Всегда можно подобрать ξ так, чтобы $\xi(1) = \xi(a) = 0$. Тогда инвариант равен $\xi(c)(1 - a)$. Чтобы этот инвариант обращался в нуль каждый раз, когда $\xi(1) = \xi(a) = 0$, необходимо, чтобы c выражалось формулой $p + qa$ для некоторых $p, q \in \mathbb{Q}$. Для любой аддитивной функции ξ теперь выполнено равенство $\xi(c) = p\xi(1) + q\xi(a)$. Будем по-прежнему предполагать, что $\xi(1) = 0$, но откажемся от условия $\xi(a) = 0$. Тогда инвариант равен $\xi(a)(c - 1 + q(1 - a))$. Либо $c = (1 - q) + qa$, либо $\xi(a) = 0$ всякий раз, когда $\xi(1) = 0$. В последнем случае a обязано быть рациональным. Итак, если инвариант равен нулю вне зависимости от ξ , то либо $a, c \in \mathbb{Q}$, либо $c = (1 - q) + qa$ для некоторого $q \in \mathbb{Q}$. Можно показать, что в обоих указанных случаях любой инвариант в самом деле обращается в нуль (в самом деле, равенства $\xi(1) = 0$ всегда можно добиться прибавлением к ξ функции ξ_0 с подходящим постоянным коэффициентом).

3.3. Геометрическая интерпретация. В этом разделе мы попытаемся вписать инварианты SAF в концептуальную схему аддитивных мер на геометрических объектах. Прежде всего, перекладывание отрезков нужно проинтерпретировать как объект геометрии, хотя изначально оно рассматривалось как динамическая система.

Определение (Надстройка). Имеется общая конструкция, позволяющая создавать из дискретных динамических систем геометрические объекты или, если угодно, непрерывные динамические системы. Это так называемая *надстройка*. Пусть $f : X \rightarrow X$ — отображение некоторого множества в себя, рассматриваемое как динамическая система (то есть нас интересует поведение итераций этого отображения). Возьмем *цилиндр* $X \times [0; 1]$ — это множество всех пар вида (x, t) , где $x \in X$, а $t \in [0; 1]$. Например, если X — одномерная кривая, нарисованная на горизонтальной плоскости, то можно представлять себе множество $X \times [0; 1]$ как цилиндрическую поверхность, заметаемую вертикальным отрезком, нижний конец которого едет по кривой X . У полученного цилиндра есть нижний край $X \times \{0\}$ и верхний край $X \times \{1\}$. Свернем цилиндр в «трубочку», приклеив верхний край к нижнему. Тут, однако, важно, каким образом осуществить склейку. Мы точку $(x, 1)$ приклеим к точке $(f(x), 0)$. Полученную поверхность обозначим через M_f и назовем *надстройкой* над отображением f . Иногда надстройку называют *цилиндром* отображения f .

Будем по-прежнему считать, что X — кривая. Малый участок кривой вблизи каждой точки, за исключением концов, выглядит примерно как часть прямой. Цилиндр, соответственно, выглядит в малом как часть плоскости — это верно вблизи каждой точки, кроме точек нижнего и верхнего краев, и кроме вертикальных отрезков, проходящих через концевые точки кривой X . Это наблюдение сохраняет силу и для надстройки M_f , в том

числе около тех точек, где склеены края. Если один край приклеить к другому аккуратно, то это будет выглядеть приблизительно так, как будто одну полуплоскость приклеили к другой полуплоскости (скажем, нижнюю полуплоскость приклеили к верхней), и получилась плоскость. Кроме того, что поверхность цилиндра похожа на плоскость, на ней есть еще одна структура, а именно, фиксировано направление вверх. В надстройке это направление тоже определено. Представьте себе точку $p \in M_f$, движущуюся вверх по вертикальному отрезку — образующей цилиндра. Когда p достигает верхнего конца отрезка, она отождествляется с точкой нижнего основания и идет дальше вверх, попадая на другой вертикальный отрезок, а может быть, на тот же самый (в частности, точка может гулять по циклу, двигаясь все время вверх). Направление вверх тем самым определено и в тех точках поверхности M_f , которые получились в результате приклеивания верхнего края цилиндра к нижнему.

Отождествим кривую X с основанием $X \times \{0\}$ цилиндра, и представим себе точку $x \in X$. Вместо того, чтобы действовать на эту точку итерациями отображения f , то есть дискретной динамической системой, можно теперь рассмотреть непрерывный процесс. Стартовав в $(x, 0)$, точка поедет вверх и через время t окажется в положении (x, t) . При $t = 1$ это положение соответствует точке $(f(x), 0)$, то есть снова оказывается в X . Для любого $t > 0$ имеем $(x, t) = (f^{[t]}(x), \{t\})$, где $[t] := t - \{t\}$ — целая часть числа t .

Далее будем считать, что $f \in \text{ИЕТ}(I)$. Поверхность M_f в этом случае получается склеиванием полосок. Каждая полоска в M_f имеет четкую ориентацию — это прямоугольник с горизонтальными и вертикальными сторонами. Если I_i — кусок разбиения отрезка I , на котором f действует как параллельный перенос, то соответствующая подотрезку I_i полоска S_i приклеена своей нижней стороной к I_i , а своей верхней стороной — к $f(I_i)$. Итак, поверхность M_f склеена из вертикальных полосок по их горизонтальным сторонам. Каждая точка каждой горизонтальной стороны, за исключением, возможно, конечного их числа, приклеена к какой-то другой (или той же самой) точке горизонтальной стороны. Теперь рассмотрим более общие поверхности того же типа. А именно, будем предполагать, что поверхность M получена склейкой нескольких вертикальных полос по их горизонтальным сторонам так, что все горизонтальные стороны оказываются к чему-то приклеенными (можно склеивать стороны или части сторон только попарно, а не по три и более). Мы теперь уже не требуем, чтобы все полоски имели одинаковую высоту. Будем называть такую поверхность *ИЕТ-поверхностью*. Из определения следует, что около всякой своей точки, за исключением точек границы, ИЕТ-поверхность M выглядит как часть плоскости, причем фиксированы горизонтальное и вертикальное направление. Кроме того, определены так называемые *вертикальные траектории* — траектории точек, движущихся по M в вертикальном направлении.

Вообще говоря, данную ИЕТ-поверхность M можно разными способами реализовать как склейку полос. Рассмотрим любой способ и нарисуем в каждой из полос горизонтальную среднюю линию. Таким образом получится объединение конечного числа горизонтальных отрезков в M , которое пересекает каждую вертикальную траекторию, за исключением, возможно, конечного их числа. Назовем такое объединение отрезков *горизонтальной трансверсалью*.

Определение (Отображение первого возвращения на горизонтальную трансверсаль). Пусть J — горизонтальная трансверсаль ИЕТ-поверхности M . Для каждой точки $x \in J$, выпустим вертикальную траекторию из точки x (скажем, по направлению вверх) и дождемся первого момента, когда эта траектория снова пересечет J . По нашему предположению, это случится рано или поздно для любой точки $x \in J$, кроме, возможно, конечного их числа. Обозначим полученную точку следующего пересечения через $g(x)$. Нетрудно видеть, что $g \in \text{ИЕТ}(J)$. Это переключивание g называется *отображением первого возвращения на горизонтальную трансверсаль J* .

Имеет смысл говорить про перекладывание отрезков, определенное на J , и про группу $\text{IET}(J)$, несмотря на то, что J — это не один отрезок, а объединение конечного числа отрезков. Можно, например, составить произвольным образом конкатенацию \tilde{J} отрезков из J , приставив их друг к другу параллельными переносами в произвольном порядке, и думать про $g \in \text{IET}(J)$ как про перекладывание кусков этой конкатенации. При таком понимании имеет смысл говорить про инвариант SAF произвольного элемента $g \in \text{IET}(J)$.

Задача. Докажите, что значение инварианта SAF для $g \in \text{IET}(J)$ не зависит от способа формирования конкатенации \tilde{J} .

Следующее определение принадлежит по существу Арну [1] (мы только постарались избавиться от лишних деталей) и использует отображение первого возвращения на горизонтальную трансверсаль.

Определение (Инвариант IET-поверхности). Рассмотрим IET-поверхность M и горизонтальную трансверсаль $J \subset M$. Определим инвариант $\text{Inv}_\xi(M)$ поверхности M как соответствующий инвариант отображения первого возвращения в J .

Это определение корректно в том смысле, что результат не зависит не только от выбора конкатенации \tilde{J} для данной трансверсали, но и от выбора самой трансверсали. Частный случай утверждения о корректности сформулирован в следующей задаче.

Задача. Представим IET-поверхность M как склейку вертикальных полос. Если выбрать в каждой полосе по средней линии, получится горизонтальная трансверсаль J . А теперь выберем в одной из полос еще одну горизонтальную линию, и получим другую горизонтальную трансверсаль $J^+ \supset J$. Убедитесь в том, что отображение первого возвращения в J^+ имеет тот же инвариант SAF, что и отображение первого возвращения в J .

Итак, если есть IET-поверхность M и есть аддитивная функция ξ , то определено число $\text{Inv}_\xi(M)$. Это число зависит от геометрии поверхности, в частности, от того, как выглядят вертикальные траектории. Но про поверхность можно думать как про геометрический объект того же типа, что и многоугольник или многогранник. А про динамический инвариант тогда можно будет думать как про геометрический, то есть как про «аддитивную» меру на IET-поверхностях.

Что в этом контексте означает аддитивность? Из общих соображений, смысл должен быть примерно такой. Если из двух IET-поверхностей составить одну большую поверхность, то инвариант большой поверхности будет суммой инвариантов двух составляющих поверхностей. Остается только придать точный смысл тому, каким образом составить IET-поверхность из двух других. На самом деле, точный смысл можно придать несколькими способами. Легкий способ состоит в том, чтобы просто взять объединение двух непересекающихся IET-поверхностей. Мы не требовали в определении, чтобы IET-поверхность состояла только из одного куска, и поэтому несвязное объединение двух IET-поверхностей снова является IET-поверхностью. Инвариант объединения, конечно, равен сумме инвариантов.

Более содержательный способ такой. Допустим, что в IET-поверхностях M' и M'' выбраны горизонтальные трансверсали J' и J'' , соответственно, одинаковой длины. Разрежем M' и M'' вдоль этих трансверсали и склеим полученные разрезы — образовавшийся горизонтальный край поверхности M' приклеивается к горизонтальному краю поверхности M'' так, чтобы направление вверх в смысле M' переходило плавно в направление вверх в смысле M'' , и наоборот. Получим IET-поверхность M . Никакого горизонтального края у M , конечно, оставаться не должно, если правильно все склеить. Аддитивность состоит в том, что $\text{Inv}_\xi(M) = \text{Inv}_\xi(M') + \text{Inv}_\xi(M'')$.

Задача. Убедитесь в том, что так понимаемая аддитивность действительно имеет место.

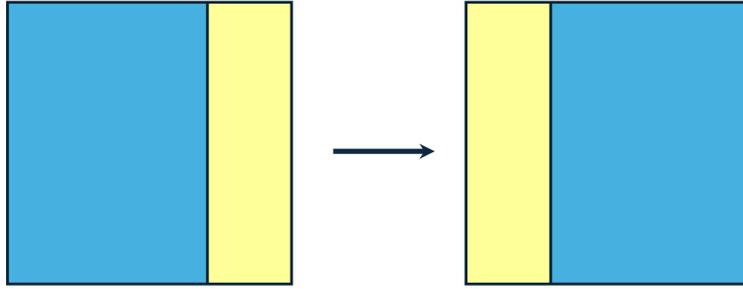


Рис. 13. Перекладывание двух прямоугольников. Это отображение сохраняет вторую координату, а на первую координату действует как перекладывание двух отрезков = вращение окружности.

3.4. Перекладывания многоугольников. Разрежем многоугольник P на несколько многоугольников P_1, \dots, P_n . Как обычно, это означает, что P представлен как объединение многоугольных кусков P_i , причем эти куски не имеют общих внутренних точек. Допустим, что можно по-другому разрезать фигуру P на многоугольники Q_1, \dots, Q_n таким образом, чтобы каждый кусок Q_i получался из соответствующего куска P_i сдвигом на некоторый вектор \vec{v}_i . Из этих сдвигов можно составить одно отображение f , то есть $f(x) = x + \vec{v}_i$ на P_i . Отображение f определено всюду на P , за исключением точек на границах кусков. Можно и в этих точках как-то доопределить отображение f , но это не принципиально, поскольку добиться непрерывности все равно не получится. Легче считать, что на границах между кусками f вообще не определено — мы так и будем считать. Такое отображение f называется *перекладыванием многоугольников*, а при фиксированном P говорят про *перекладывание кусков многоугольника P* . Это понятие является непосредственным двумерным аналогом перекладываний отрезков. Перекладывание многоугольников можно рассматривать как равноставленность фигуры P с самой собой.

Фиксируем P . Тогда определена группа $\text{PET}(P)$, каждый элемент которой — перекладывание кусков многоугольника P . Два таких перекладывания считаются равными, если они совпадают всюду, за исключением, быть может, объединения конечного числа прямолинейных отрезков. Групповая операция в $\text{PET}(P)$ совпадает с композицией отображений.

Пример (Перекладывания прямоугольников). Через $[0; 1]^2$ обозначен квадрат, заданный в координатах x, y неравенствами $0 \leq x, y \leq 1$. Рассмотрим отображение f квадрата $[0; 1]^2$ в себя, определенное формулой $f(x, y) = (\{x + \alpha\}, y)$. Здесь α — фиксированное действительное число. Отображение f можно рассматривать как перекладывание двух прямоугольников. Впрочем, этот пример не очень интересен, поскольку он по существу сводится к одномерному перекладыванию отрезков: нетривиальная динамика наблюдается только по x координате. См. рис. 13, иллюстрирующий это отображение. А на рис. 14 представлен другой пример перекладывания прямоугольников — на этот раз прямоугольников три, и данное отображение не сводится (по крайней мере, не мгновенно сводится) к одномерной динамике.

Попробуйте изобразить первые несколько итераций тех перекладываний прямоугольников, которые представлены на рис. 13 и 14.

Уже для перекладываний прямоугольников имеются интересные нерешенные задачи, в том числе такие, которые мотивированы практическими вопросами (например, вопросы компьютерной диагностики в медицине). Но перекладывать можно, конечно, не только прямоугольники, а для многоугольников более разнообразной формы задачи становятся еще интереснее, и еще сложнее. Отметим, например, что перекладывания многоугольников возникли в инженерии, при моделировании явления колебаний за счет ошибок переполнения в цифровых фильтрах. Я понимаю, в чем состоит математическая модель этого явления, но мне было сложно извлечь какую-либо практическую суть явления из имеющихся инженерных учебников — последние, как мне показалось, всеми способами

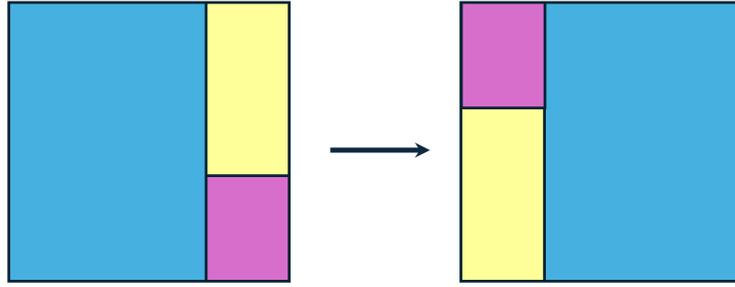


Рис. 14. Перекладывание трех прямоугольников.

пытаются замаскировать существо дела нагромождением технических деталей. Другим способом перекладывания многоугольников возникают в гамильтоновой механике. Более «чистый» (в смысле «чистой математики») источник задач будет описан ниже, в контексте внешних бильярдов, хотя и этот источник не лишен некоторой, впрочем, косвенной, практической ценности. Теперь определим двумерные аналоги инвариантов SAF.

Определение (Динамические инварианты перекладываний многоугольников). Зафиксируем простую T -инвариантную меру μ . Кроме того, рассмотрим отображение $\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, аддитивное как по первому, так и по второму аргументу. В этом случае отображение β линейно над \mathbb{Q} по каждому из аргументов; такие отображения называют *билинейными* над \mathbb{Q} , или \mathbb{Q} -билинейными. Пусть теперь f — перекладывание кусков P_1, \dots, P_n многоугольника P ; по определению перекладывания, каждый кусок P_i является выпуклым многоугольником, а f в ограничении на P_i действует как параллельный перенос на вектор v_i . Определим *динамический инвариант*, ассоциированный с μ и β , формулой

$$\text{Inv}_{\mu, \beta}(f) = \sum_{i=1}^n \beta(\mu(P_i), v_i).$$

В частности, если μ — мера Хадвигера, то соответствующий инвариант $\text{Inv}_{\mu, \beta}$ будет называться *динамическим инвариантом Хадвигера*. Этот последний зависит как от выбора координированной прямой, так и от выбора билинейной над \mathbb{Q} функции β . Зафиксировав μ и ξ , будем писать просто Inv вместо $\text{Inv}_{\mu, \beta}$, чтобы разгрузить обозначения. Как и для перекладываний отрезков (применимо то же самое рассуждение с совершенно незначительными модификациями), можно показать, что

$$\text{Inv}(f \circ g) = \text{Inv}(f) + \text{Inv}(g), \quad \forall f, g \in \text{PET}(P).$$

Из этой формулы вытекает стандартный набор следствий — тот же самый, что и для перекладываний отрезка. Одно из важных следствий позволяет устанавливать неперIODичность перекладывания при помощи подсчета инварианта. А именно, если инвариант оказался отличным от нуля, то можно точно утверждать, что перекладывание не является периодическим.

Определение (Граничные, периодические и аперIODические точки). Пусть f — перекладывание кусков некоторого многоугольника P . Вообще говоря, $f(x)$ определено не для каждой точки из P . Например, есть точки, находящиеся на границах кусков, и для таких точек отображение не определено. Может быть и так, что некоторые итерации, скажем, $f(x), \dots, f^{n-1}(x)$ определены для некоторого натурального n , а следующая итерация $f^n(x)$ уже не определена. Это означает, что точка $f^{n-1}(x)$ попала на границу между кусками, в то время как предыдущие точки орбиты этой неприятности избежали. Бывает и так, что все положительные итерации определены, но не определены некоторые отрицательные (для $n < 0$ значение итерации f^n в точке x определяется как $g^{|n|}(x)$, где $g := f^{-1}$ обозначает отображение, обратное к f). *Граничными точками* многоугольника P называются такие точки $x \in P$, для которых итерации $f^n(x)$ определены не для всех $n \in \mathbb{Z}$. Все остальные

точки (не граничные) делятся на *периодические* и *апериодические* в зависимости от того, найдется ли такое ненулевое целое число p , что $f^{n+p}(x) = f^n(x)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Если x — периодическая точка, а положительное целое число p удовлетворяет указанному свойству, и при этом является самым маленьким положительным целым числом с этим свойством, то p называется *периодом* точки p .

Важные вопросы про динамическую систему, порожденную отображением f : есть ли у f периодические точки? Сколько их (скажем, конечное число или бесконечное)? А есть ли апериодические точки? У перекладывания двух прямоугольников, изображенного на рис. 13, либо все неграничные точки периодические (если величина сдвига рациональна), либо все неграничные точки апериодические. Более интересно, однако, такое динамическое поведение перекладывания f , при котором возникают как периодические, так и апериодические точки. Первым шагом на пути к доказательству существования апериодических точек у f может служить проверка того факта, что f не является периодическим, то есть представляет элемент бесконечного порядка в группе $\text{PET}(P)$. В конкретных задачах этот первый шаг оказывается самым существенным, а в его осуществлении могут помочь определенные выше динамические инварианты.

Как уже было упомянуто, про перекладывание f кусков многоугольника P можно сказать, что f осуществляет трансляционную равносоставленность многоугольника P с самим собой. Такой взгляд на вещи позволяет сформулировать более общее понятие. Зафиксируем произвольную группу G движений плоскости. Отображение f , осуществляющее G -равносоставленность некоторого многоугольника P с самим собой, называется G -перекладыванием кусков многоугольника P . Это все имеет смысл и в том случае, когда сам P и, возможно, некоторые из кусков, неограниченны. Просто перекладывание многоугольников в рамках только что введенной терминологии следует называть T -перекладыванием, или трансляционным перекладыванием.

3.5. Внешние бильярды. Рассмотрим выпуклую фигуру Π на плоскости и точку x вне этой фигуры. Будем считать, что фигура Π замкнута, то есть содержит все свои граничные точки. Например, можно предположить, что Π ограничена некоторой гладкой выпуклой кривой, причем как внутренность кривой, так и сама кривая являются частями множества Π . Из точки $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Pi$ проведем *опорную прямую* к Π , то есть такую прямую L_x , которая пересекает фигуру Π , но при этом Π лежит (не строго) по одну сторону от L_x . Если пересечение $L_x \cap \Pi$ состоит ровно из одной точки a , то можно пройти от x по направлению к a , а потом от точки a пройти дальше столько же в том же направлении. Получим точку $f_{\Pi}(x) = 2a - x$. Описанная процедура определяет некоторое отображение f_{Π} , которое называется отображением *внешнего бильярда* относительно фигуры Π , см. рис. 15 слева.

Вообще говоря, из точки x можно провести две опорные прямые к Π — условно говоря, правую и левую. Каждый раз выбирая правую опорную прямую, получаем *правый внешний бильярд*, а если всякий раз выбирать левую прямую, то будет *левый внешний бильярд*. Условимся, что под внешним бильярдом мы понимаем правый внешний бильярд, если только явно не оговорено противное. Отображение f_{Π} определено не везде. Разумеется, оно не определено в точках самой фигуры Π . Но еще могут быть такие точки x , для которых $L_x \cap \Pi$ состоит более чем из одной точки, то есть является целым отрезком. Так бывает, например, в тех случаях, когда P — многоугольник. В этом случае отображение f_{Π} не определено в точке x , и даже если каким-то искусственным способом доопределить его, то все равно нарушится непрерывность.

Более подробно про внешние бильярды можно почитать в [5].

Далее мы исключительно будем рассматривать частный случай, когда Π — выпуклый многоугольник. В этом случае f_{Π} действует как G_0 -перекладывание многоугольников (вообще говоря, неограниченных), где G_0 — группа, состоящая из всех параллельных переносов и всех центральных симметрий (поворотов на 180 градусов). См. рис. 15 справа.

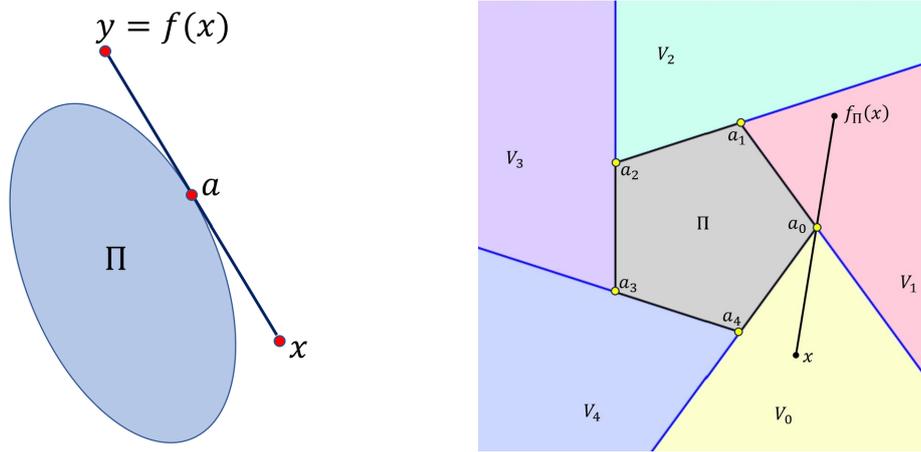


Рис. 15. Слева: внешний бильярд относительно выпуклой фигуры Π с гладкой границей. Отображение f_Π определено и непрерывно всюду на $\mathbb{R}^2 \setminus \Pi$. Справа: внешний бильярд относительно правильного пятиугольника. Отображение f_Π определено на объединении 5 секторов V_0, \dots, V_4 и на каждом из этих секторов действует как поворот на 180 градусов вокруг вершины сектора.

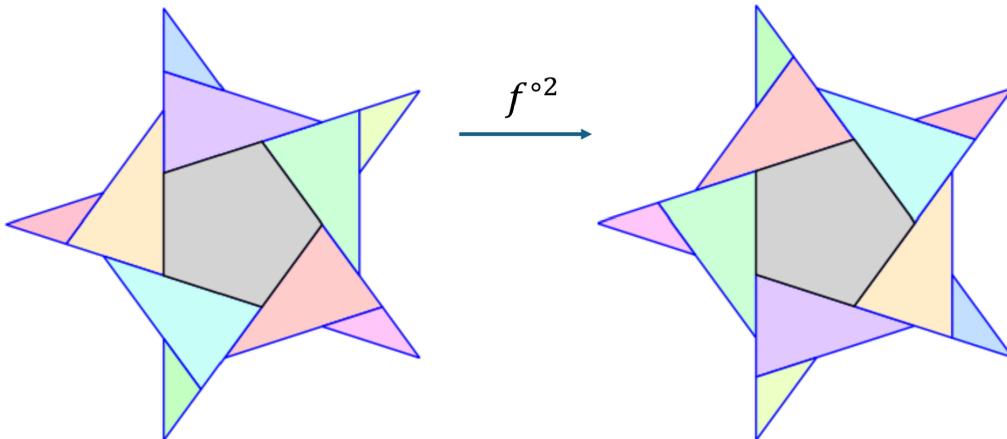


Рис. 16. Вторая итерация пятиугольного внешнего бильярда, ограниченная на конечную инвариантную область.

Важное наблюдение: вторая итерация f_Π^2 отображения внешнего бильярда относительно выпуклого многоугольника Π является трансляционным перекладыванием. Правда, некоторые куски этого перекладывания неограниченны. С другой стороны, оказывается, что для правильного многоугольника Π всегда можно ограничить f_Π на подходящим образом выбранную фигуру так, чтобы это ограничение оказалось перекладыванием ограниченных выпуклых многоугольников. На рис. 16 показано, что получается для внешнего бильярда относительно правильного пятиугольника. Это нетривиальный и, как оказывается, очень интересный пример перекладывания многоугольников.

Динамические инварианты, в частности, динамический инвариант Хадвигера, помогают решить вопрос о наличии аперiodических точек для внешних бильярдov. Вычисление этих инвариантов представляет лишь технические сложности. А вообще, нужно просто взять и посчитать, см. [2]. Как и в статическом случае, достаточно работать с конечномерными векторными пространствами над \mathbb{Q} , то есть в конечном счете все вычисления сводятся к оперированию конечными наборами рациональных чисел. Возможно, введенные динамические инварианты помогут и в решении других вопросов динамики.

Будем далее все время предполагать, что Π — правильный N -угольник. Если увеличивать n , то разбиение множества $\mathbb{R}^2 \setminus \Pi$ на куски, соответствующее отображению f_{Π}^n (куски — это компоненты области определения отображения f_{Π}^n), вообще говоря, становится все более мелким. Эксперименты указывают на то, что образуется множество периодических многоугольных областей, объединение которых плотно в $\mathbb{R}^2 \setminus \Pi$ (последнее утверждение не доказано в общем случае!). Периодические области внешнего бильярда представляют собой выпуклые многоугольники, число сторон которых не превосходит $2N$ (докажите это!). Разумеется, мы здесь говорим о *максимальных* периодических областях, то есть об областях, все внутренние точки которых периодические, а все точки границы являются граничными (в смысле динамики отображения f_{Π}) или аппроксимируются граничными точками.

Задача. Рассмотрим периодическую область U для f_{Π} , такую, что $f_{\Pi}^n(U) = U$. Как может выглядеть ограничение отображения f_{Π} на U ?

Случаи $N = 3, 4, 6$ являются особыми. Их особенность состоит в том, что группа движений плоскости, порожденная отражениями (то есть поворотами на 180 градусов) относительно вершин многоугольника Π , действует вполне разрывно на всей плоскости. Группа, порожденная некоторым набором преобразований — это все преобразования, которые можно получить из данного набора многократным применением операций композиции и взятия обратного отображения. Такие преобразования, очевидно, образуют группу. А *вполне разрывное* действие группы H движений плоскости, по определению, таково, что для всякой точки $x \in \mathbb{R}^2$, орбита точки x , то есть множество $\{g(x) \mid g \in H\}$ не имеет предельных точек в конечной части плоскости (про такое множество говорят, что оно *дискретно*). Для всех остальных N , то есть при $N \neq 3, 4, 6$, группа движений плоскости, порожденная отражениями относительно вершин многоугольника Π , может иметь не только недискретные, но даже и всюду плотные орбиты. Иначе говоря, бывают орбиты, посещающие любой, сколь угодно маленький, открытый диск.

Пусть $N = 3, 4$ или 6 . Имеется группа H движений плоскости, действующая вполне разрывно и включающая все те движения, к которым сводится внешний бильярд в ограничении на любые куски. Как следствие, всю плоскость можно замостить определенной формы плитками, так, что действие группы H состоит в простой перестановке плиток (возможно, с поворотами на 180 градусов). Границы между плитками переходят при действии группы H в границы между плитками, а плитки переходят в плитки. Например, для правильного треугольника можно нарисовать замощение, состоящее из равных друг другу правильных треугольников. А если Π — квадрат, то соответствующее замощение выглядит как лист тетради в клеточку; разные клеточки переставляются друг с другом элементами группы H . Поскольку f_{Π} действует посредством элементов группы H , это отображение тоже соответствует определенной перестановке плиток. Таким образом, всякая плитка лежит в периодической области, а все граничные точки для f_{Π} лежат на границах между плитками. Это очень простая картинка. Единственная тонкость состоит в том, что иногда несколько плиток могут объединяться в одну большую периодическую область. Например, при $N = 3$ и при $N = 6$ некоторые периодические области являются треугольниками (и совпадают с плитками), а некоторые — правильными шестиугольниками, составленными из шести плиток.

Задача. Для $N = 3$, нарисуйте примеры периодических областей обоих типов.

Задача. Пусть $N = 4$, а квадрат Π задан неравенствами $0 \leq x, y \leq 1$. Для всякой пары целых чисел $(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, рассмотрим квадрат

$$\Pi_{k,l} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid k < x < k + 1, l < y < l + 1\}.$$

Как следует из общих рассуждений, приведенных выше, каждый такой квадрат $\Pi_{k,l}$ переходит при действии отображения f_{Π} в некоторый другой квадрат $\Pi_{k',l'}$. Выразите (k', l')

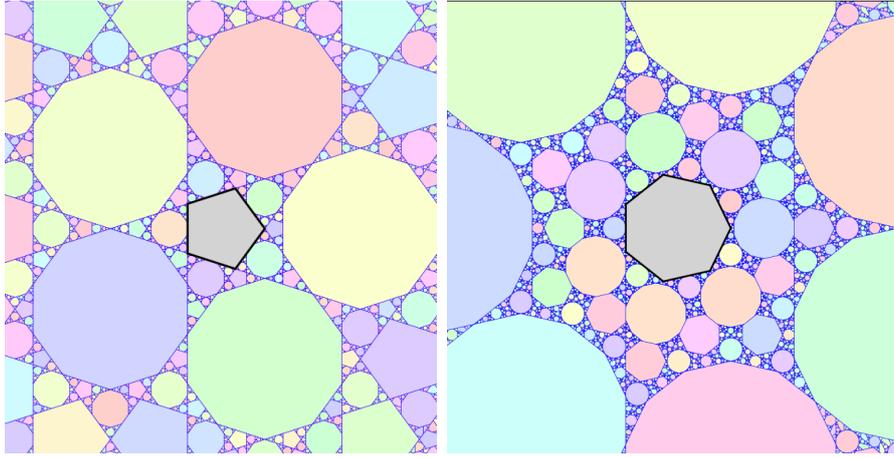


Рис. 17. Внешний бильярд относительно правильного пятиугольника (слева) и правильного семиугольника (справа). Изображенные многоугольники — куски итерации f_{Π}^n для некоторого большого n . Многие из этих кусков являются на самом деле периодическими областями. Темные отрезки — границы кусков. Объединения этих отрезков накапливаются при $n \rightarrow \infty$ к фрактальной фигуре, содержащей множество аперiodических точек.

как явную функцию от (k, l) . Тем самым будет получено полное описание динамики отображения f_{Π} .

Задача. Дайте полное описание динамики внешнего бильярда f_{Π} для случаев $N = 3$ и $N = 6$ в том же смысле, как в предыдущей задаче.

Случай $N \neq 3, 4, 6$ оказывается намного сложнее и намного интереснее. На рис. 17 изображены случаи $N = 5$ (слева) и $N = 7$ (справа). Иногда, скажем, для $N = 5$, можно указать *динамическое самоподобие* (оно было впервые указано С. Табачниковым [8]). Что это такое, мы сейчас обсудим. Для этого нам понадобится понятие отображения первого возвращения.

Задача (Отображение первого возвращения). Пусть f — перекладывание кусков многоугольника P . (Впрочем, можно рассматривать и более общие ситуации, в которых введенные ниже понятия также имеют смысл). Выделим некоторое подмножество $Q \subset P$ — будем считать для простоты, что это многоугольник — и рассмотрим точку $x \in Q$. Если целое число $n > 0$ удовлетворяет условию $f^n(x) \in Q$ и при этом никакое меньшее положительное целое число этому условию не удовлетворяет, то n называется *временем первого возвращения* точки x в множество Q . Будем обозначать время первого возвращения через n_x . Неформально говоря, это момент времени, когда орбита точки x впервые возвращается в Q . Если орбита никогда не возвращается в Q , то полагают $n_x := \infty$. *Отображение первого возвращения* в Q — это отображение $g = \mathcal{R}_Q f$, определенное на множестве $\{x \in Q \mid n_x < \infty\}$ и отправляющее точку x в $g(x) := f^{n_x}(x)$.

Отображения первого возвращения играют огромную роль в теории динамических систем и составляют основу *метода ренормализации*.

Задача. Пусть f — перекладывание кусков органиченного многоугольника P . Докажите, что в каждом, сколь угодно маленьком, диске $D \subset P$ содержатся либо граничные точки, либо точки, возвращающиеся в D (то есть такие точки, время возвращения которых в D конечно).

Утверждение предыдущей задачи можно довести до теоремы о том, что, для всякого многоугольника $Q \subset P$, площадь множества $\{x \in Q \mid n_x = \infty\}$ равна нулю. Таким образом, возвращающиеся точки составляют абсолютное большинство. Это — частный случай так называемой *теоремы Пуанкаре о возвращении*. Неформальное доказательство вы можете

получить уже сейчас. Формальные трудности связаны лишь с тем, для каких множеств точек плоскости можно говорить о площади и каким свойствам эта площадь должна удовлетворять. Если f — перекладывание многоугольных кусков многоугольника P , а $Q \subset P$ — содержащийся в P многоугольник, то отображение первого возвращения в Q тоже оказывается перекладыванием многоугольных кусков фигуры Q , разве что количество кусков не обязано быть конечным. Динамическое самоподобие у f возникает тогда, когда отображение первого возвращения $\mathcal{R}_Q f$ на некоторый меньший многоугольник $Q' \subsetneq Q$ подобно (мы ниже придадим этому точный смысл) отображению f .

Определение (Динамическое самоподобие). Пусть f, P, Q — как выше, и положим $g := \mathcal{R}_Q f$. Допустим, что $g = h \circ f \circ h^{-1}$, где h — евклидово подобие (преобразование плоскости, уменьшающее все расстояния в одинаковое число раз). Тогда говорят, что f допускает самоподобие. Более общим образом, про динамическое самоподобие говорят в том случае, когда $\mathcal{R}_{Q'} f = h \circ \mathcal{R}_Q f \circ h^{-1}$, где $Q' \subset Q \subset P$ — многоугольники, а отображение $h : Q \rightarrow Q'$ — преобразование подобия.

Вернемся к внешнему бильярду $f = f_{\Pi}$ для правильного N -угольника Π . Динамические самоподобия у f были обнаружены только для $N = 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 18$. При наличии динамического самоподобия легко установить существование апериодических точек. С другой стороны, динамические инварианты дают более общий и более гибкий метод, меньше завязанный на специфике отображения.

Теорема ([2]). *При $N \neq 3, 4, 6$, отображение внешнего бильярда относительно правильного N -угольника обладает апериодическими точками.*

Доказательство этой теоремы построено по следующему плану. Во-первых, имеется невыпуклая многоугольная область X вокруг правильного N -угольника Π , которая переходит в себя под действием внешнего бильярда; точнее говоря, отображение f осуществляет перекладывание кусков этой области. Ограничение отображения f на X , тем самым, представляет собой перекладывание кусков ограниченного многоугольника. Кстати говоря, внимательное разглядывание рисунка 17 даст идею о том, как выбирать X — имеются «ожерелья» вокруг Π , состоящие из касающихся друг друга периодических областей, а внутренность такого ожерелья, за вычетом Π , переходит в себя при действии f . Соответствующие ожерелья и ограниченные ими инвариантные области были найдены Гуткиным и Симаный [4] для более общих классов внешних бильярдов, а именно, для внешних бильярдов относительно «квазирациональных» многоугольников (мы не будем сейчас определять и обсуждать понятие квазирациональности).

Хочется доказать, что у отображения $f : X \rightarrow X$ есть апериодические точки. Более слабое утверждение состоит в том, что f не является периодическим перекладыванием. Это более слабое утверждение, впрочем, является ключевым шагом. Для его доказательства достаточно посчитать динамические инварианты Хадвигера для $f|_X$ и убедиться в том, что среди этих инвариантов есть ненулевые.

Оканчивается доказательство более техническим, и менее важным, рассуждением, позволяющим заключить, что перекладывание с ненулевыми динамическими инвариантами обладает апериодическими точками. Априори, область X могла бы разбиться граничными точками на бесконечное число подобластей, каждая из которых имеет конечный период, но среди этих периодов встречаются сколь угодно большие. Можно доказать, что такой сценарий невозможен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Arnoux, *Échanges d'intervalles et flots sur les surfaces*. Ergodic theory (Sem., Les Plans-sur-Bex, 1980), pp. 5–38, 1981.
- [2] A. Belyi, A. Kanel-Belov, Ph. Rukhovich, and V. Timorin, *Aperiodic points for outer billiards*, Preprint arXiv.org: 2311.09643 (2024).
- [3] Болтянский В. Г., *Третья проблема Гильберта*. — М.: Наука, 1977.

- [4] E. Gutkin and N. Simanyi. *Dual polygonal billiards and necklace dynamics*. Communications in Mathematical Physics, **143**:3 (1992): 431–449.
- [5] Догру Ф., Табачников С.Л., *Внешние бильярды*. В: Летние конференции Турнира городов: Избранные материалы. Вып. 1 / Под общ. ред. Н.Н. Константинова. Сост. Б.Р. Френкин. — М.: МПНМО, 2009.
- [6] I. Zakharevich, *Perspectives on scissors congruence*. Bulletin of the AMS **53**.2 (2016): 269–294.
- [7] С.-Н. Sah, *Scissors congruences of the interval*. Preprint, 1981.
- [8] С. Л. Табачников, *Внешние бильярды*, Успехи Мат. Наук, **48**:6 (294) (1993), 75–102.
- [9] Хадвигер Г., *Лекции об объёме, площади поверхности и изопериметрии*. — М.: Наука, 1966.
- [10] H. Hadwiger and P. Glur, *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone*. Elemente der Mathematik, **6**:97–106, 1951.
- [11] H. Hopf, *Selected Chapters of Geometry*. Notes by Hans Samelson of lectures by Heinz Hopf in a course at ETH in the summer of 1940. Available at <https://pi.math.cornell.edu/~%20hatcher/Other/hopf-samelson.pdf>