Задачи Г.Б. Шабата к лекции 1, часть 1-я.

1.1. Проверьте, что множество многочленов над коммутативным полукольцом образует коммутативное полукольцо относительно операций покомпонентного сложения и свёртки. Распространите этот результат на коммутативные кольца.

1.2. (а) Для произвольных множеств X, Y, Z постройте биекции

$$Z^{X\times Y} \cong \left(Z^X\right)^Y \text{ и } (Y\times Z)^X \cong Y^X \times Z^X.$$

(б)* Придумайте определение *суммы множеств* $X+Y$, постройте биекцию

$$Z^{X+Y} \cong Z^X \times Z^Y$$

и докажите для конечных X, Y равенство $\#\left(Y^X\right) = \#Y^{\#X}$.

1.3. (а) Для любого поля $\Bbbk$ и любого множества X введите с помощью поэлементных операций структуру кольца на множестве $\Bbbk^X$.

(б) Проверьте, что определённое в лекции отображение func является гомоморфизмом колец.

1.4. Вычислите (желательно, пользуясь доступными компьютерными средствами) для конечных полей $\Bbbk \in \{\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4, \mathbb{F}_5, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_8, \mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{11}, \dots\}$ произведение

$$\prod_{\alpha\in\Bbbk}(x-\alpha) \in \Bbbk[x].$$

Сформулируйте гипотезу, докажите её и сделайте выводы.

1.5. Проверьте, что множество чисел $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2} := \{x+y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ образует подполе поля действительных чисел $\mathbb{R}$.

1.6. Проверьте, что множество $\mathbb{R}+\mathbb{R}\mathrm{i} := \{x+y\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ с покомпонентным сложением и умножением по формуле

$$(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i}) := x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}$$

образует поле. Это и есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

1.7. Пусть x^2+px+q – неприводимый квадратный трёхчлен с коэффициентами из поля $\Bbbk$. Постройте расширение поля $\Bbbk$, включающее в себя как частные случаи конструкции двух предыдущих задач, в которых фигурировали многочлены x^2-2 и x^2+1.

1.8. Всякое ли положительное рациональное число можно представить в виде суммы аликвотных дробей?

1.9. (Кватернионы). Введём в пространстве $\mathbb{H} := \mathbb{R}+\mathbb{R}\mathrm{i}+\mathbb{R}\mathrm{j}+\mathbb{R}\mathrm{k}$ ассоциативное умножение, определённое правилами

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1;$$

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k},\ \ \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i},\ \ \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}.$$

Проверьте, что $\mathbb{H}$ – тело (при проверке наличия обратного по умножению воспользуйтесь *нормой* $||t+x\mathrm{i}+y\mathrm{j}+z\mathrm{k}|| = \sqrt{t^2+x^2+y^2+z^2}$ со свойством $||q_1q_2|| \equiv ||q_1||||q_2||$). Исследуйте уравнение $q^2=-1$.