Комплексная динамика

Виктор Клепцын

CNRS, Institute of Mathematical Research of Rennes, University of Rennes 1

22 июля 2020 г.

Множество Мандельброта

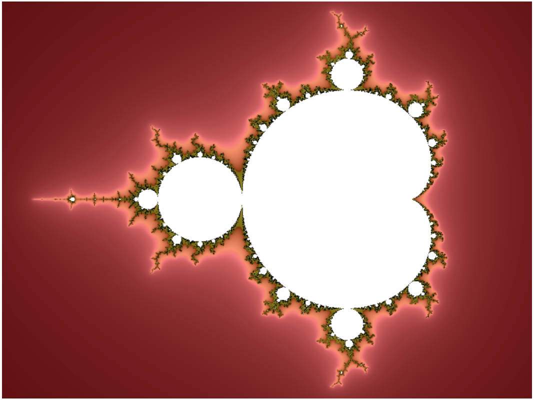


Image credit: Online Fractal Generator

$$z_0 = 0,$$

Множество Мандельброта

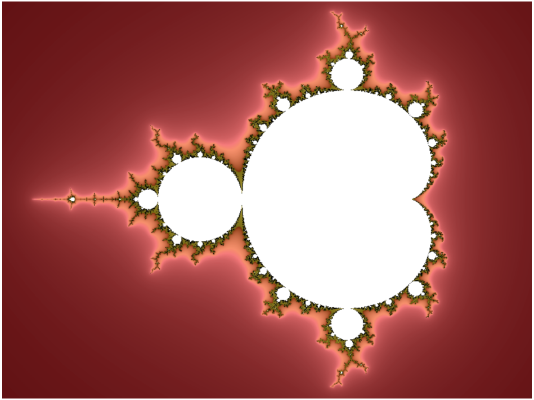


Image credit: Online Fractal Generator

$$z_0 = 0, \quad z_n = z_{n-1}^2 + c$$

Множество Мандельброта

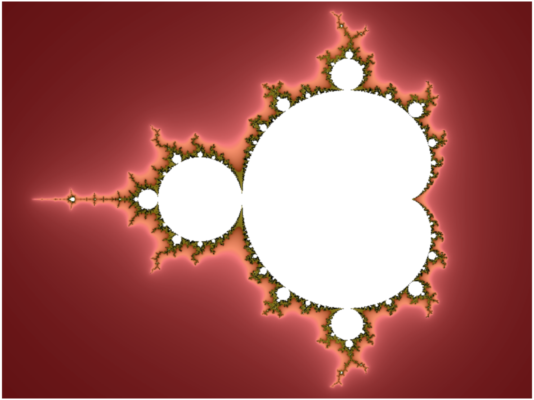


Image credit: Online Fractal Generator

$$z_0 = 0, \quad z_n = z_{n-1}^2 + c$$

Определение

Множество Мандельброта:

$$\mathcal{M} = \{c \mid z_n \not\to \infty\}.$$

Заполненное множество Жюлиа

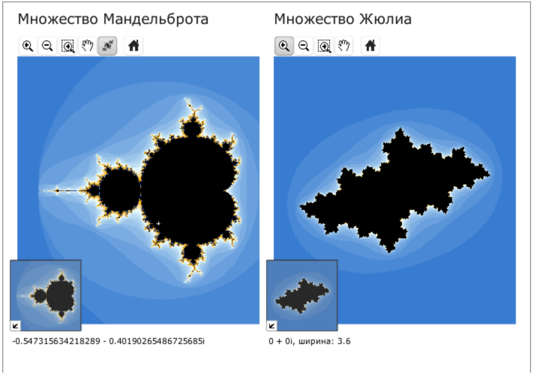


Image credit: Elementy.ru

Заполненное множество Жюлиа

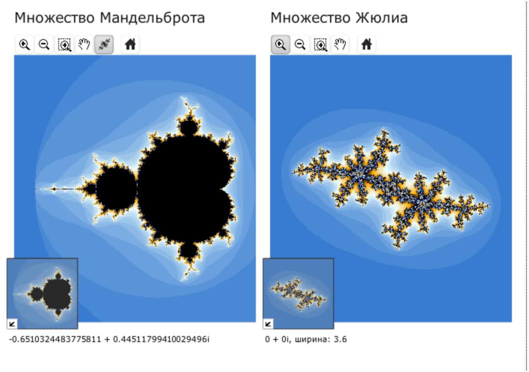


Image credit: Elementy.ru

Заполненное множество Жюлиа

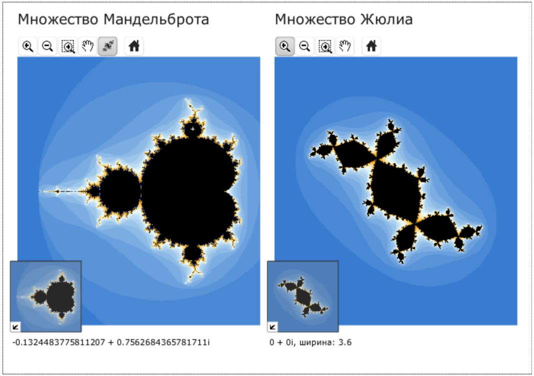


Image credit: Elementy.ru

Заполненное множество Жюлиа

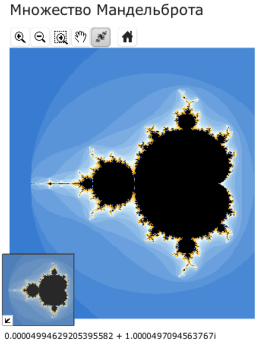


Image credit: Elementy.ru

Заполненное множество Жюлиа

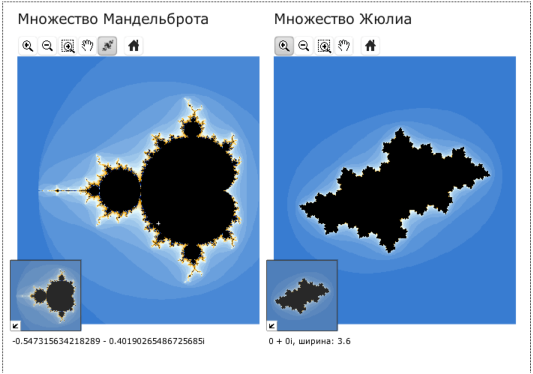


Image credit: Elementy.ru

$$f_c(z) = z^2 + c$$

Заполненное множество Жюлиа

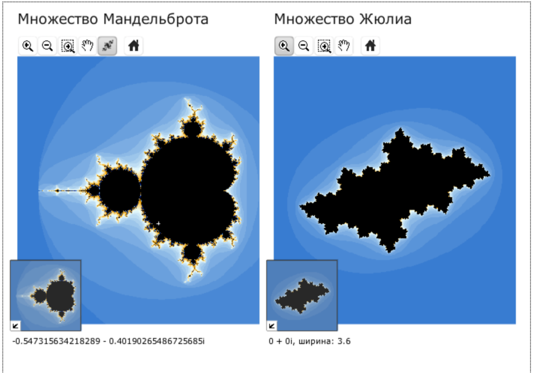


Image credit: Elementy.ru

$$f_c(z) = z^2 + c$$

Определение

Заполненное множество Жюлиа:

$$J_c = \{z_0 \mid f_c^n(z_0) \not\to \infty\}.$$

Случай $c = 0$

$$f_c(z) = z^2$$

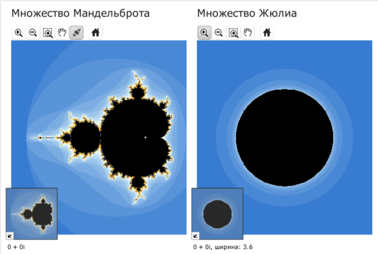


Image credit: Elementy.ru

Случай $c = 0$

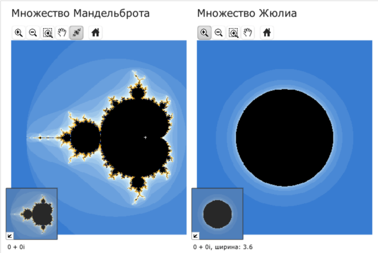


Image credit: Elementy.ru

$$f_c(z) = z^2$$

$$J_c = \{|z| \leq 1\}.$$

Случай $c = 0$

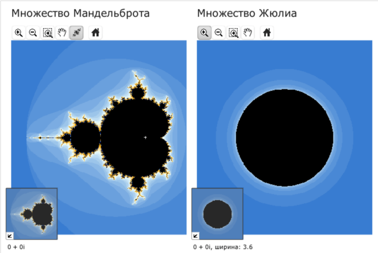


Image credit: Elementy.ru

$$f_c(z) = z^2$$

$$J_c = \{|z| \leq 1\}.$$

Точки внутри окружности стремятся к 0;

Случай $c = 0$

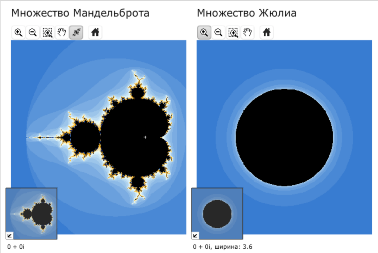


Image credit: Elementy.ru

$$f_c(z) = z^2$$

$$J_c = \{|z| \le 1\}.$$

Точки внутри окружности стремятся к 0; точки снаружи — к бесконечности;

Случай $c = 0$

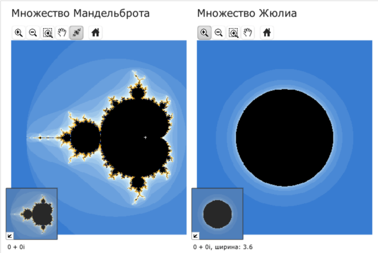


Image credit: Elementy.ru

$$f_c(z) = z^2$$

$$J_c = \{|z| \leq 1\}.$$

Точки внутри окружности стремятся к 0; точки снаружи — к бесконечности; на окружности происходит хаотическая динамика:

Случай $c = 0$

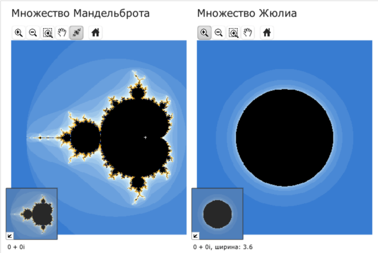


Image credit: Elementy.ru

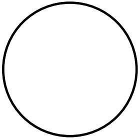
$$f_c(z) = z^2$$

$$J_c = \{|z| \leq 1\}.$$

Точки внутри окружности стремятся к 0; точки снаружи — к бесконечности; на окружности происходит хаотическая динамика:

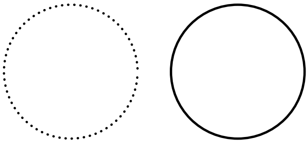
$$\arg z^2 = 2 \arg z.$$

Случай большого $|c|$



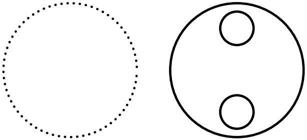
- Если $f_c^n(z)$ не убегает на бесконечность, то $z \in B_0 = \{|z| < R\}$.

Случай большого $|c|$



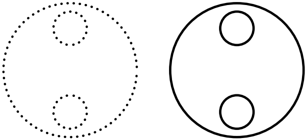
- Если $f_c^n(z)$ не убегает на бесконечность, то $z \in B_0 = \{|z| < R\}$.
- Тогда $z^2 \in B_0 - c$, потому что $f(z) \in B_0$

Случай большого $|c|$



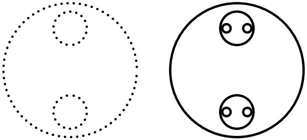
- Если $f_c^n(z)$ не убегает на бесконечность, то $z \in B_0 = \{|z| < R\}$.
- Тогда $z^2 \in B_0 - c$, потому что $f(z) \in B_0$
- Тогда $z \in B_1 := \sqrt{B_0}$

Случай большого $|c|$



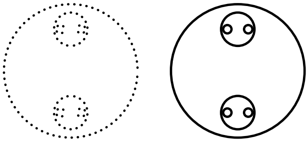
- Если $f_c^n(z)$ не убегает на бесконечность, то $z \in B_0 = \{|z| < R\}$.
- Тогда $z^2 \in B_0 - c$, потому что $f(z) \in B_0$
- Тогда $z \in B_1 := \sqrt{B_0}$
- Тогда $z^2 \in B_1 - c$

Случай большого $|c|$



- Если $f_c^n(z)$ не убегает на бесконечность, то $z \in B_0 = \{|z| < R\}$.
- Тогда $z^2 \in B_0 - c$, потому что $f(z) \in B_0$
- Тогда $z \in B_1 := \sqrt{B_0}$
- Тогда $z^2 \in B_1 - c$
- Тогда $z \in B_2 := \sqrt{B_1}$

Случай большого $|c|$

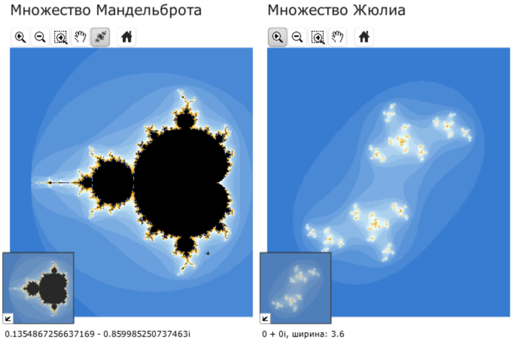


- Если $f_c^n(z)$ не убегает на бесконечность, то $z \in B_0 = \{|z| < R\}$.
- Тогда $z^2 \in B_0 - c$, потому что $f(z) \in B_0$
- Тогда $z \in B_1 := \sqrt{B_0}$
- Тогда $z^2 \in B_1 - c$
- Тогда $z \in B_2 := \sqrt{B_1} \ \ldots$

Множества Жюлиа и Мандельброта

Теорема

$c \in \mathcal{M} \Leftrightarrow J_c$ связно; иначе J_c распадается в «канторову пыль».



Хаос: множество Жюлиа

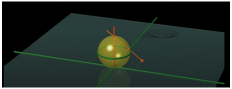


Image credit: “Dimensions”

Сфера Римана $\widehat{\mathbb{C}}$: комплексная плоскость с добавленной бесконечностью.

Хаос: множество Жюлиа

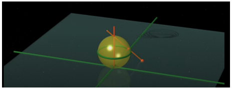


Image credit: “Dimensions”

Сфера Римана $\widehat{\mathbb{C}}$: комплексная плоскость с добавленной бесконечностью.

Определение

Множество Фату $F(f)$: множество тех точек $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, итерации которых устойчивы (достаточно близкие точки всегда остаются близко)

Хаос: множество Жюлиа

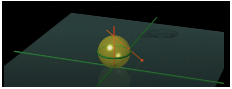


Image credit: "Dimensions"

Сфера Римана $\widehat{\mathbb{C}}$: комплексная плоскость с добавленной бесконечностью.

Определение

Множество Фату $F(f)$: множество тех точек $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, итерации которых устойчивы (достаточно близкие точки всегда остаются близко)

Определение

Множество Жюлиа $J(f)$: дополнение к множеству Фату = множество точек с неустойчивыми орбитами.

Хаос: множество Жюлиа

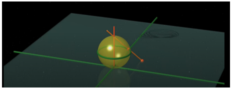


Image credit: “Dimensions”

Сфера Римана $\widehat{\mathbb{C}}$: комплексная плоскость с добавленной бесконечностью.

Определение

Множество Фату $F(f)$: множество тех точек $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, итерации которых устойчивы (достаточно близкие точки всегда остаются близко)

Определение

Множество Жюлиа $J(f)$: дополнение к множеству Фату = множество точек с неустойчивыми орбитами.

Можно применять даже к рациональным $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$!

Множество Жюлиа: свойства

- вполне инвариантность:

$$f(J) = f^{-1}(J) = J,$$

Множество Жюлиа: свойства

- вполне инвариантность:

$$f(J) = f^{-1}(J) = J,$$

$$f(F) = f^{-1}(F) = F.$$

Множество Жюлиа: свойства

- вполне инвариантность:

$$f(J) = f^{-1}(J) = J,$$

$$f(F) = f^{-1}(F) = F.$$

- $F(f)$ открыто,

Множество Жюлиа: свойства

- вполне инвариантность:

$$f(J) = f^{-1}(J) = J,$$

$$f(F) = f^{-1}(F) = F.$$

- $F(f)$ открыто,
- $J(f)$ замкнуто

Множество Жюлиа: свойства

- вполне инвариантность:

$$f(J) = f^{-1}(J) = J,$$

$$f(F) = f^{-1}(F) = F.$$

- $F(f)$ открыто,
- $J(f)$ замкнуто и непусто.

Множества Жюлиа и итерации

Комплексно-дифференцируемые отображения **локально** это подобия:

Image credit: “Dimensions”

$\bigcup_n f^n(U)$ накрывает почти всю сферу Римана, кроме, быть может, одной или двух точек.

при достаточно большом n

$f^n(U \cap J) = J.$

Множества Жюлиа и итерации

Комплексно-дифференцируемые отображения **локально** это подобия:

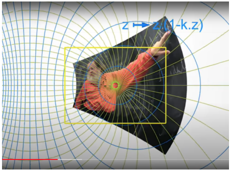


Image credit: “Dimensions”

$\bigcup_n f^n(U)$ накрывает почти всю сферу Римана, кроме, быть может, одной или двух точек.

при достаточно большом n

$$f^n(U \cap J) = J.$$

Множества Жюлиа и итерации

Комплексно-дифференцируемые отображения **локально** это подобия:

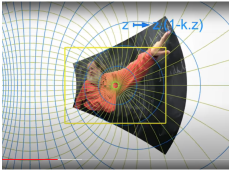


Image credit: "Dimensions"

Теорема (Растягивание образов окрестности)

Если U — окрестность точки из множества Жюлиа, то при достаточно большом n

$$f^n(U \cap J) = J.$$

Множества Жюлиа и итерации

Комплексно-дифференцируемые отображения локально это подобия:

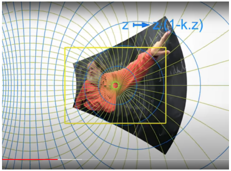


Image credit: "Dimensions"

Теорема (Растягивание образов окрестности)

Если U — окрестность точки из множества Жюлиа, то $\bigcup_n f^n(U)$ накрывает почти всю сферу Римана, кроме, быть может, одной или двух точек.

при достаточно большом n

$$f^n(U \cap J) = J.$$

Множества Жюлиа и итерации

Комплексно-дифференцируемые отображения локально это подобия:

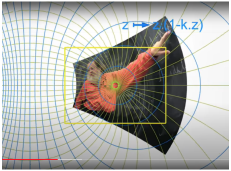


Image credit: “Dimensions”

Теорема (Растягивание образов окрестности)

Если U — окрестность точки из множества Жюлиа, то $\bigcup_n f^n(U)$ накрывает почти всю сферу Римана, кроме, быть может, одной или двух точек.

Следствие (Расползание окрестности по множеству Жюлиа)

Если U — окрестность точки из множества Жюлиа, то

Множества Жюлиа и итерации

Комплексно-дифференцируемые отображения локально это подобия:

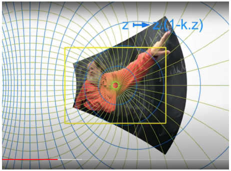


Image credit: “Dimensions”

Теорема (Растягивание образов окрестности)

Если U — окрестность точки из множества Жюлиа, то $\bigcup_n f^n(U)$ накрывает почти всю сферу Римана, кроме, быть может, одной или двух точек.

Следствие (Расползание окрестности по множеству Жюлиа)

Если U — окрестность точки из множества Жюлиа, то при достаточно большом n

$$f^n(U \cap J) = J.$$

Притягивающие орбиты

Определение

Точка z для отображения f:

Притягивающие орбиты

Определение

Точка z для отображения f:

- неподвижная, если $f(z) = z$;

Притягивающие орбиты

Определение

Точка z для отображения f:

- неподвижная, если $f(z) = z$;
- периодическая, если $f^k(z) = z$ для некоторого k.

Притягивающие орбиты

Определение

Точка z для отображения f:

- неподвижная, если $f(z) = z$;
- периодическая, если $f^k(z) = z$ для некоторого k.

Неподвижная точка z:

Притягивающие орбиты

Определение

Точка z для отображения f:

- неподвижная, если $f(z) = z$;
- периодическая, если $f^k(z) = z$ для некоторого k.

Неподвижная точка z:

- притягивающая, если $0 < |f'(z)| < 1$;

Притягивающие орбиты

Определение

Точка z для отображения f:

- неподвижная, если $f(z) = z$;
- периодическая, если $f^k(z) = z$ для некоторого k.

Неподвижная точка z:

- притягивающая, если $0 < |f'(z)| < 1$;
- суперпритягивающая, если $|f'(z)| = 0$.

Притягивающие орбиты

Определение

Точка z для отображения f:

- неподвижная, если $f(z) = z$;
- периодическая, если $f^k(z) = z$ для некоторого k.

Неподвижная точка z:

- притягивающая, если $0 < |f'(z)| < 1$;
- суперпритягивающая, если $|f'(z)| = 0$.

Притягивающие и суперпритягивающие орбиты со своими бассейнами притяжения лежат в множестве Фату!

Множество Жюлиа и бассейны притяжения

Из «теорем о расползании» следует:

Множество Жюлиа и бассейны притяжения

Из «теорем о расползании» следует:

Теорема

Множество Жюлиа есть граница любого бассейна притяжения притягивающей или суперпритягивающей периодической орбиты.

Множество Жюлиа и бассейны притяжения

Из «теорем о расползании» следует:

Теорема

Множество Жюлиа есть граница любого бассейна притяжения притягивающей или суперпритягивающей периодической орбиты.

Следствие

Множество Жюлиа есть граница *заполненного множества Жюлиа*.

Метод Ньютона

Метод Ньютона $z \mapsto z - \frac{F(z)}{F'(z)}$

Метод Ньютона

Метод Ньютона $z \mapsto z - \frac{F(z)}{F'(z)}$
Для кубического многочлена F получаем

Метод Ньютона

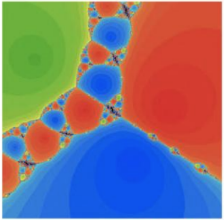


Image credit: D. Scheicher, Complex Dynamics, the Mandelbrot Set, and Newton's Method — or: On Useless and Useful Mathematics, из сборника «*An Invitation to Mathematics*»

Метод Ньютона $z \mapsto z - \frac{F(z)}{F'(z)}$
Для кубического многочлена F получаем три бассейна притяжения с общей границей.

Хаос везде?

Может ли быть так, что $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$, а $F(f) = \emptyset$?

Хаос везде?

Может ли быть так, что $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$, а $F(f) = \emptyset$?

- Нет, если f это полином:

Хаос везде?

Может ли быть так, что $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$, а $F(f) = \emptyset$?

- Нет, если f это полином: есть бассейн притяжения бесконечности.

Хаос везде?

Может ли быть так, что $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$, а $F(f) = \emptyset$?

- Нет, если f это полином: есть бассейн притяжения бесконечности.
- Да, если f— рациональная функция!

Хаос везде?

Может ли быть так, что $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$, а $F(f) = \emptyset$?

- Нет, если f это полином: есть бассейн притяжения бесконечности.
- Да, если f— рациональная функция!

Просто добиться хаоса на торе:

Хаос везде?

Может ли быть так, что $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$, а $F(f) = \emptyset$?

- Нет, если f это полином: есть бассейн притяжения бесконечности.
- Да, если f— рациональная функция!

Просто добиться хаоса на торе:

$$E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i], \quad f(z) = 2z.$$

Хаос везде?

Может ли быть так, что $J(f) = \widehat{\mathbb{C}}$, а $F(f) = \emptyset$?

- Нет, если f это полином: есть бассейн притяжения бесконечности.
- Да, если f— рациональная функция!

Просто добиться хаоса на торе:

$$E = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i], \quad f(z) = 2z.$$

А как этот пример перенести на сферу Римана?

$\wp$-функция Вейерштрасса и пример Латте

Простейшая мероморфная функция —

$$\wp_E(z) = \frac{1}{z^2} +$$

$\wp$-функция Вейерштрасса и пример Латте

Простейшая мероморфная функция —

$$\wp_E(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}[i] \setminus 0} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} \right.$$

$\wp$-функция Вейерштрасса и пример Латте

Простейшая мероморфная функция —

$$\wp_E(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}[i] \setminus 0} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

$\wp$-функция Вейерштрасса и пример Латте

Простейшая мероморфная функция —

$$\wp_E(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}[i] \setminus 0} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

Это — $\wp$-функция Вейерштрасса.

$\wp$-функция Вейерштрасса и пример Латте

Простейшая мероморфная функция —

$$\wp_E(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}[i] \setminus 0} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

Это — $\wp$-функция Вейерштрасса. Она задаёт разветвлённое накрытие $E \to \widehat{\mathbb{C}} \simeq S^2$, оно же изоморфизм

$\wp$-функция Вейерштрасса и пример Латте

Простейшая мероморфная функция —

$$\wp_E(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}[i] \setminus 0} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

Это — $\wp$-функция Вейерштрасса. Она задаёт разветвлённое накрытие $E \to \widehat{\mathbb{C}} \simeq S^2$, оно же изоморфизм

$$E/(z \sim (-z)) \simeq \widehat{\mathbb{C}}.$$

$\wp$-функция Вейерштрасса и пример Латте

Простейшая мероморфная функция —

$$\wp_E(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}[i] \setminus 0} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

Это — $\wp$-функция Вейерштрасса. Она задаёт разветвлённое накрытие $E \to \widehat{\mathbb{C}} \simeq S^2$, оно же изоморфизм

$$E/(z \sim (-z)) \simeq \widehat{\mathbb{C}}.$$

Отображение

$$f(z) = \wp_E(2 \cdot \wp_E^{-1}(z))$$

корректно определено и наследует с тора хаос везде.

$\wp$-функция Вейерштрасса и пример Латте

Простейшая мероморфная функция —

$$\wp_E(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}[i]\setminus 0} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right].$$

Это — $\wp$-функция Вейерштрасса. Она задаёт разветвлённое накрытие $E \to \widehat{\mathbb{C}} \simeq S^2$, оно же изоморфизм

$$E/(z\sim(-z)) \simeq \widehat{\mathbb{C}}.$$

Отображение

$$f(z) = \wp_E(2\cdot \wp_E^{-1}(z))$$

корректно определено и наследует с тора хаос везде. Это — пример Латте.

Теорема о линеаризации

Как устроена динамика рядом с притягивающей точкой?

$$\phi(f(z)) = \lambda \cdot \phi(z).$$

Теорема о линеаризации

Как устроена динамика рядом с притягивающей точкой?
Пусть $f(z_0) = z_0, \quad f'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| \in (0,1)$

Теорема

Существует замена переменной $w = \phi(z)$, *превращающая* f *рядом с* z *в умножение на* λ:

Теорема о линеаризации

Как устроена динамика рядом с притягивающей точкой?
Пусть $f(z_0) = z_0, \quad f'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| \in (0, 1)$

Теорема

Существует замена переменной $w = \phi(z)$, превращающая f рядом с z в умножение на λ: $\phi(f(z)) = \lambda \cdot \phi(z)$.

Доказательство.

$$\phi(z) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}(f^n(z) - z_0).$$

□

Теорема о линеаризации

Как устроена динамика рядом с притягивающей точкой?
Пусть $f(z_0) = z_0, \quad f'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| \in (0, 1)$

Теорема

Существует замена переменной $w = \phi(z)$, превращающая f рядом с z в умножение на λ: $\phi(f(z)) = \lambda \cdot \phi(z)$.

Доказательство.

$$\phi(z) = \lim_{n\to\infty} \lambda^{-n}(f^n(z) - z_0).$$

□

То же верно и для суперпритягивающих точек: они заменой приводятся к w^k, где k — кратность точки.

Покупаем билетики!

Теорема

Любая притягивающая периодическая орбита

Покупаем билетики!

Теорема

Любая притягивающая периодическая орбита притягивает к себе хотя бы одну критическую точку.

Покупаем билетики!

Теорема

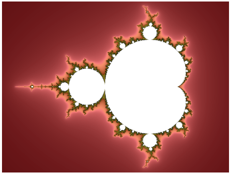
Любая притягивающая периодическая орбита притягивает к себе хотя бы одну критическую точку.

Следствие

Притягивающих периодических орбит (всех периодов!) не больше, чем критических точек.

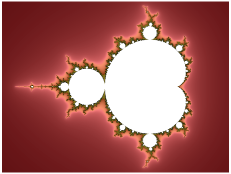
Где живут притягивающие неподвижные точки: главная кардиоида

$$f_c(z_0) = z_0,$$



Где живут притягивающие неподвижные точки: главная кардиоида

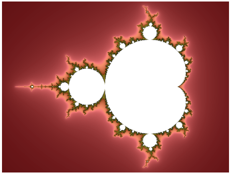
$$f_c(z_0) = z_0, \quad f_c'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| < 1$$



Где живут притягивающие неподвижные точки: главная кардиоида

$$f_c(z_0) = z_0, \quad f_c'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| < 1$$

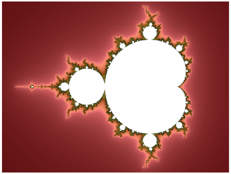
$$f_c'(z_0) = 2z_0$$



Где живут притягивающие неподвижные точки: главная кардиоида

$$f_c(z_0) = z_0, \quad f_c'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| < 1$$

$$f_c'(z_0) = 2z_0 \quad \Rightarrow z_0 = \frac{\lambda}{2}.$$

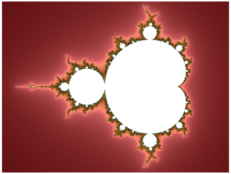


Где живут притягивающие неподвижные точки: главная кардиоида

$$f_c(z_0) = z_0, \quad f_c'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| < 1$$

$$f_c'(z_0) = 2z_0 \quad \Rightarrow z_0 = \frac{\lambda}{2}.$$

$$f_c(z_0) = z_0^2 + c = z_0$$

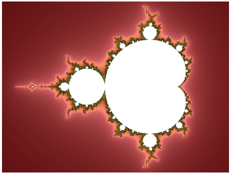


Где живут притягивающие неподвижные точки: главная кардиоида

$$f_c(z_0) = z_0, \quad f_c'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| < 1$$

$$f_c'(z_0) = 2z_0 \quad \Rightarrow z_0 = \frac{\lambda}{2}.$$

$$f_c(z_0) = z_0^2 + c = z_0 \quad \Rightarrow c = z_0 - z_0^2 =$$

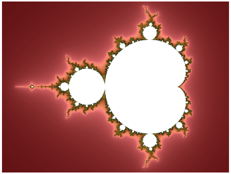


Где живут притягивающие неподвижные точки: главная кардиоида

$$f_c(z_0) = z_0, \quad f_c'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| < 1$$

$$f_c'(z_0) = 2z_0 \quad \Rightarrow z_0 = \frac{\lambda}{2}.$$

$$f_c(z_0) = z_0^2 + c = z_0 \quad \Rightarrow c = z_0 - z_0^2 = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}.$$



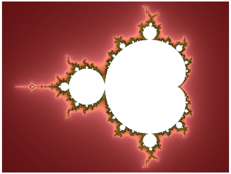
Где живут притягивающие неподвижные точки: главная кардиоида

$$f_c(z_0) = z_0, \quad f_c'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| < 1$$

$$f_c'(z_0) = 2z_0 \quad \Rightarrow z_0 = \frac{\lambda}{2}.$$

$$f_c(z_0) = z_0^2 + c = z_0 \quad \Rightarrow c = z_0 - z_0^2 = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}.$$

Это — (внутренность) кардиоиды!



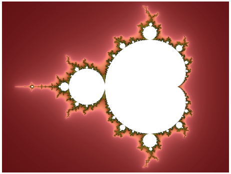
Где живут притягивающие неподвижные точки: главная кардиоида

$$f_c(z_0) = z_0, \quad f_c'(z_0) = \lambda, \quad |\lambda| < 1$$

$$f_c'(z_0) = 2z_0 \quad \Rightarrow z_0 = \frac{\lambda}{2}.$$

$$f_c(z_0) = z_0^2 + c = z_0 \quad \Rightarrow c = z_0 - z_0^2 = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}.$$

Это — (внутренность) кардиоиды!
Периодические притягивающие точки отвечают другим гиперболическим компонентам.



Потеря устойчивости: параболические точки

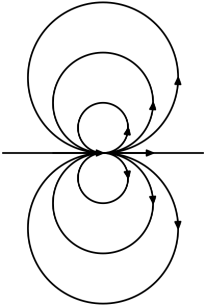
В точке $c = 1/4$ отображение заменой приводится к виду $z \mapsto z + z^2$.

Потеря устойчивости: параболические точки

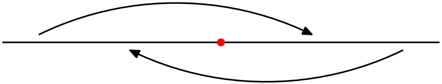
В точке $c = 1/4$ отображение заменой приводится к виду $z \mapsto z + z^2$. Динамику рядом с такой точкой можно приблизить векторным полем $\frac{dz(t)}{dt} = t^2$.

Потеря устойчивости: параболические точки

В точке $c = 1/4$ отображение заменой приводится к виду $z \mapsto z + z^2$. Динамику рядом с такой точкой можно приблизить векторным полем $\frac{dz(t)}{dt} = t^2$.

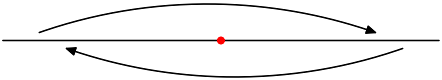


Бифуркация удвоения периода



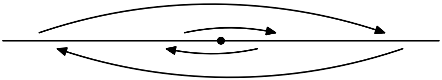
$f'(x_0) > -1$

Бифуркация удвоения периода



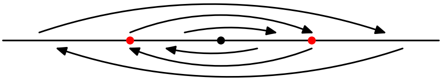
$$f'(x_0) = -1$$

Бифуркация удвоения периода



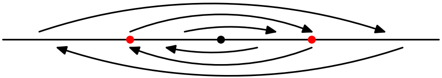
$f'(x_0) < -1$

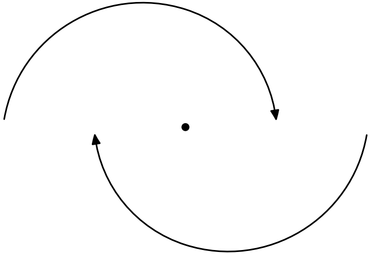
Бифуркация удвоения периода



$$f'(x_0) < -1$$

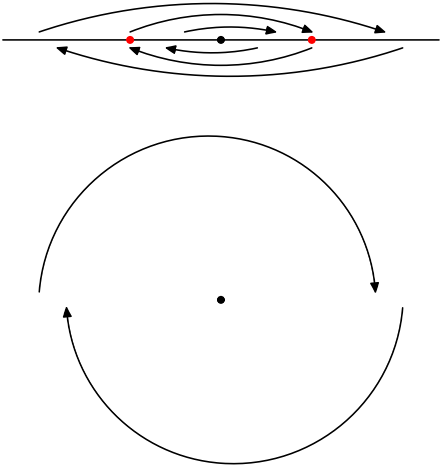
Бифуркация удвоения периода





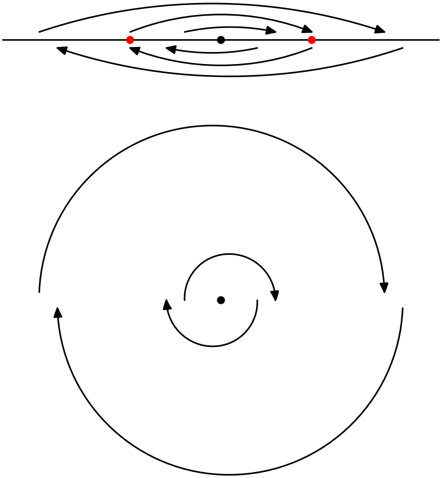
$\operatorname{Re} \lambda_j < 0$

Бифуркация удвоения периода



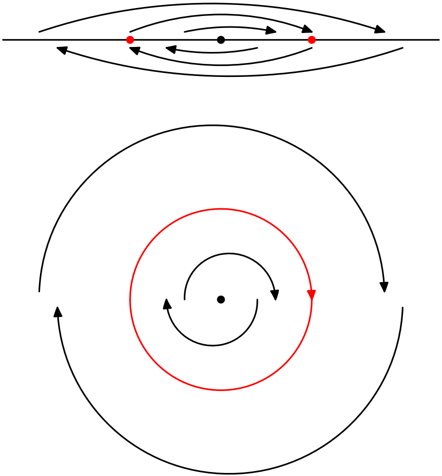
$$\operatorname{Re} \lambda_j = 0$$

Бифуркация удвоения периода



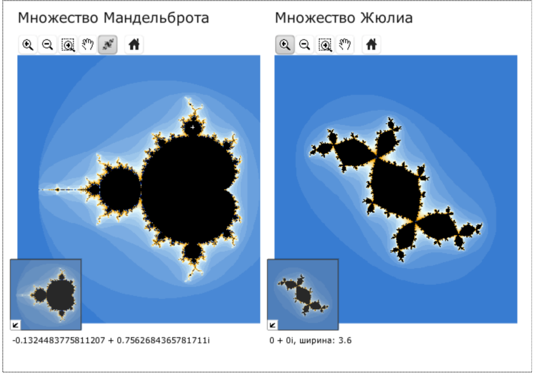
$\operatorname{Re} \lambda_j > 0$

Бифуркация удвоения периода

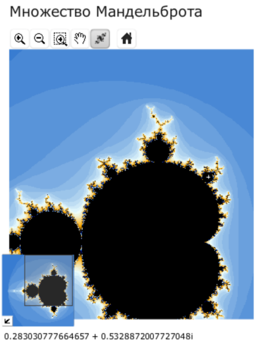


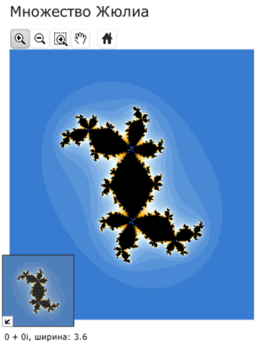
$\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$

Кролик Дуади

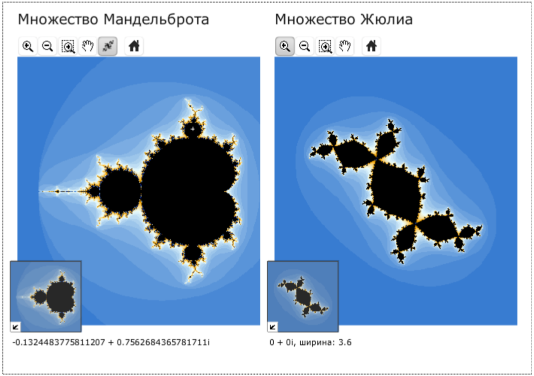


Кролик Дуади





Кролик Дуади



Три формы

Квадратичные отображения можно записывать тремя разными способами; в разных ситуациях удобнее разные из них:

Три формы

Квадратичные отображения можно записывать тремя разными способами; в разных ситуациях удобнее разные из них:

- $f(z) = z^2 + c$

Три формы

Квадратичные отображения можно записывать тремя разными способами; в разных ситуациях удобнее разные из них:

- $f(z) = z^2 + c$
- $f(z) = \lambda z + z^2$

Три формы

Квадратичные отображения можно записывать тремя разными способами; в разных ситуациях удобнее разные из них:

- $f(z) = z^2 + c$
- $f(z) = \lambda z + z^2$
- $f(z) = \lambda z(1 - z)$.

Ренормализация

Логистическое семейство

May [1976]: логистическое семейство

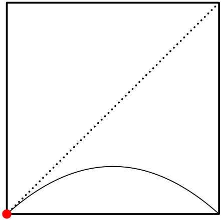
$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x) = \lambda x - \lambda x^2, \quad x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$$

Логистическое семейство

May [1976]: логистическое семейство

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x) = \lambda x - \lambda x^2, \quad x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$$

- $\lambda \leq 1$: популяция вымирает

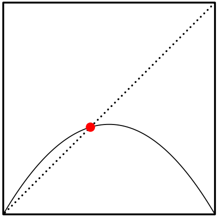


Логистическое семейство

May [1976]: логистическое семейство

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x) = \lambda x - \lambda x^2, \quad x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$$

- $\lambda \leq 1$: популяция вымирает
- $1 < \lambda < 3$: устойчивое равновесие

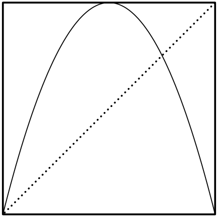


Логистическое семейство

May [1976]: логистическое семейство

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x) = \lambda x - \lambda x^2, \quad x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$$

- $\lambda \leq 1$: популяция вымирает
- $1 < \lambda < 3$: устойчивое равновесие
- $\lambda = 4$: хаос.



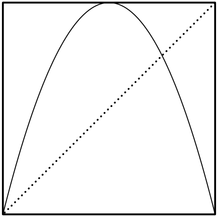
Логистическое семейство

May [1976]: логистическое семейство

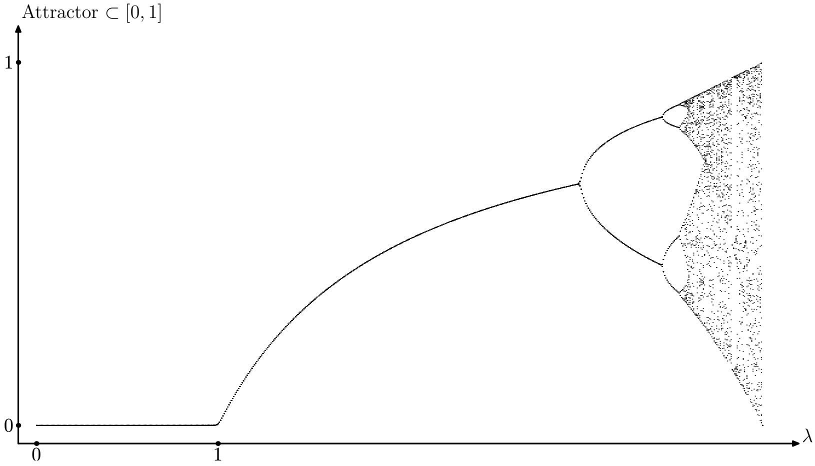
$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x) = \lambda x - \lambda x^2, \quad x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$$

- $\lambda \leq 1$: популяция вымирает
- $1 < \lambda < 3$: устойчивое равновесие
- $\lambda = 4$: хаос. Подстановка $x = \sin^2 \alpha$:

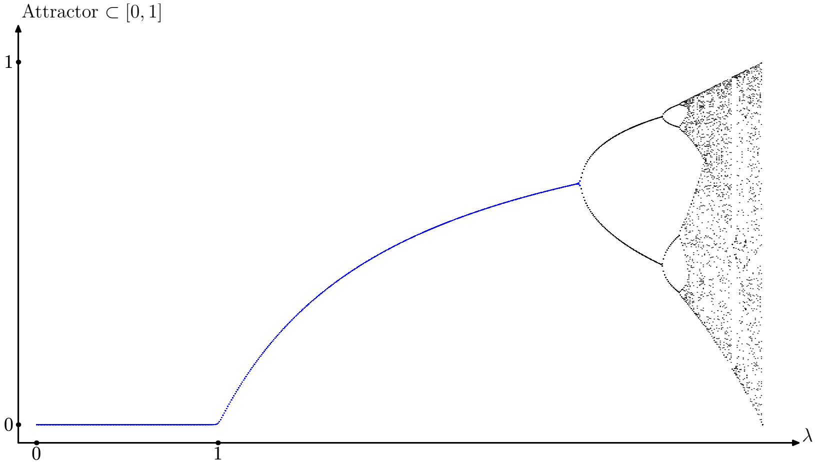
$$\alpha \mapsto 2\alpha.$$



Логистическое семейство: диаграмма

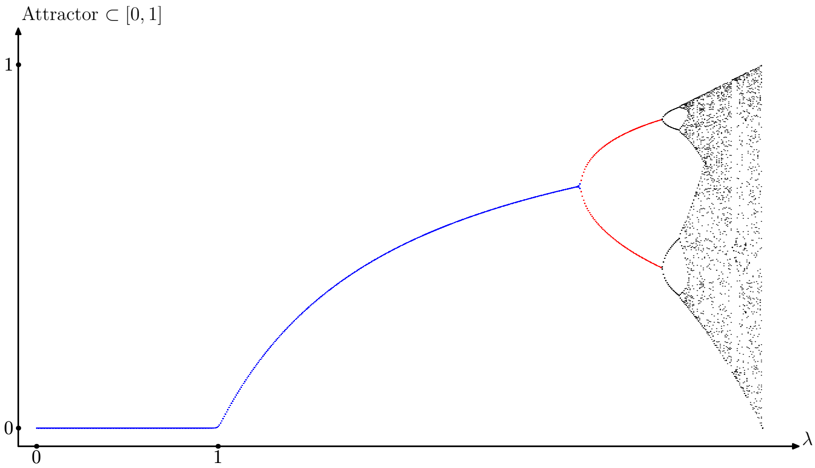


Логистическое семейство: диаграмма



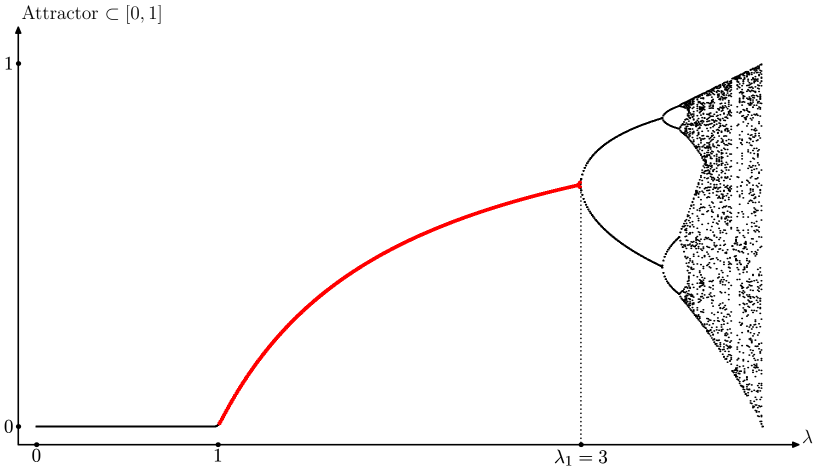
Голубая часть: притягивающая неподвижная точка

Логистическое семейство: диаграмма



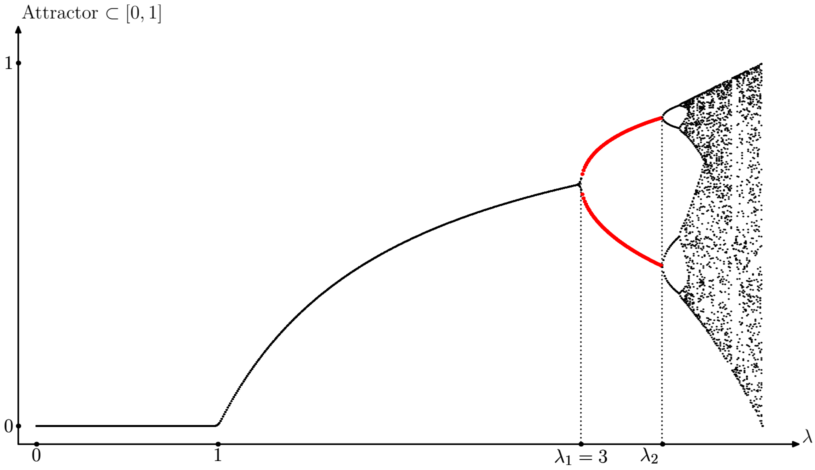
Красная линия: после бифуркации удвоения периода

Каскад бифуркаций удвоения периода



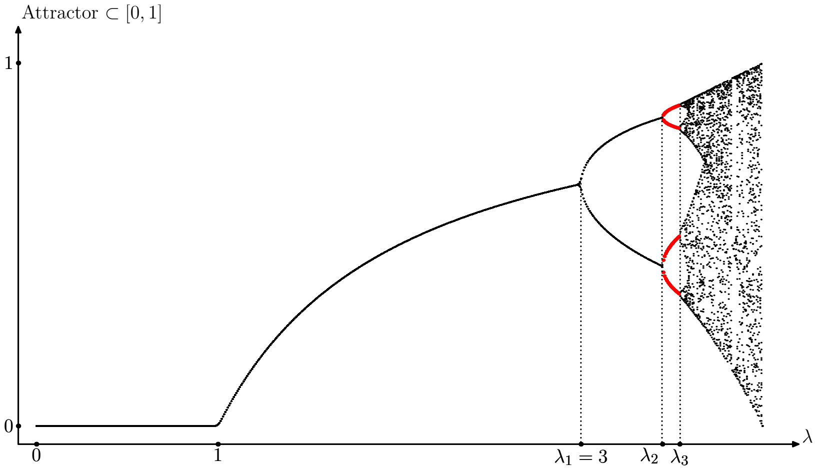
$\lambda_1 = 3$

Каскад бифуркаций удвоения периода



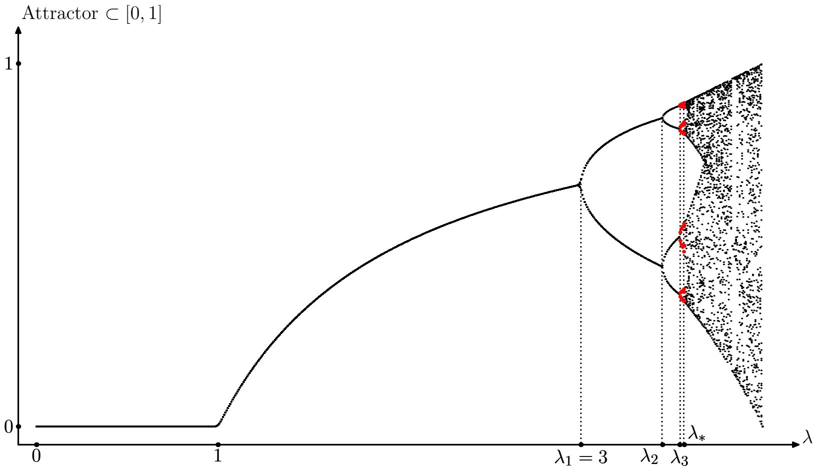
$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 \approx 3.449$

Каскад бифуркаций удвоения периода



$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 \approx 3.449$, $\lambda_3 \approx 3.544$

Каскад бифуркаций удвоения периода



$\lambda_n \to \lambda_* \approx 3.569$

Универсальность Фейгенбаума-Куле-Трессера

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x),$$

Универсальность Фейгенбаума-Куле-Трессера

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x), \qquad g_\mu : y \mapsto \mu \sin \pi y,$$

Универсальность Фейгенбаума-Куле-Трессера

$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x),$
$x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$

$g_\mu : y \mapsto \mu \sin \pi y,$

Универсальность Фейгенбаума-Куле-Трессера

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x),$$
$$x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$$

$$g_\mu : y \mapsto \mu \sin \pi y,$$
$$y \in [0,1], \quad \mu \in [0,4]$$

Универсальность Фейгенбаума-Куле-Трессера

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x),$$
$$x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$$
$$\lambda_* - \lambda_n \sim c\delta^{-n}$$

$$g_\mu : y \mapsto \mu \sin \pi y,$$
$$y \in [0,1], \quad \mu \in [0,4]$$

Универсальность Фейгенбаума-Куле-Трессера

$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x),$
$x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$
$\lambda_* - \lambda_n \sim c\delta^{-n}$

$g_\mu : y \mapsto \mu \sin \pi y,$
$y \in [0,1], \quad \mu \in [0,4]$
$\mu_* - \mu_n \sim c'\delta^{-n}$

Универсальность Фейгенбаума-Куле-Трессера

$$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x),$$
$$x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$$
$$\lambda_* - \lambda_n \sim c\delta^{-n};$$

$$g_\mu : y \mapsto \mu \sin \pi y,$$
$$y \in [0,1], \quad \mu \in [0,4]$$
$$\mu_* - \mu_n \sim c'\delta^{-n};$$

Универсальность: константа δ одна и та же!

Универсальность Фейгенбаума-Куле-Трессера

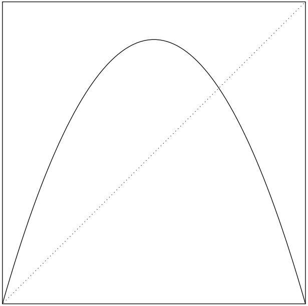
$f_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x)$,
$x \in [0,1], \quad \lambda \in [0,4]$
$\lambda_* - \lambda_n \sim c\delta^{-n}$;

$g_\mu : y \mapsto \mu \sin \pi y$,
$y \in [0,1], \quad \mu \in [0,4]$
$\mu_* - \mu_n \sim c'\delta^{-n}$;

Универсальность: константа δ одна и та же!

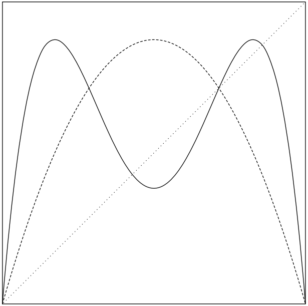
Почему?!

Ренормализация



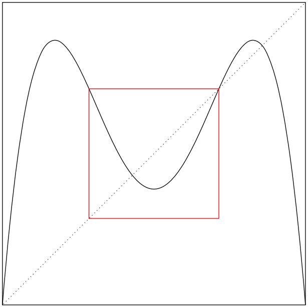
f

Ренормализация



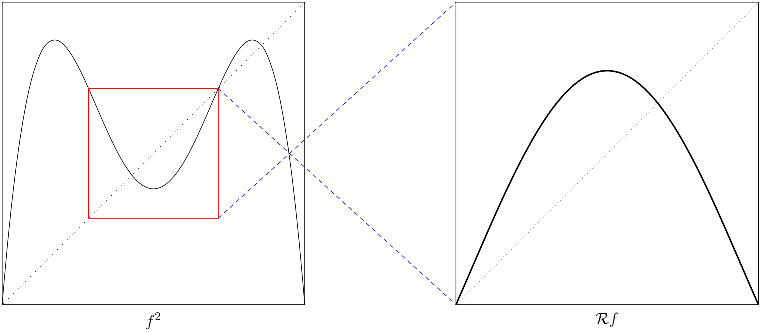
f^2

Ренормализация

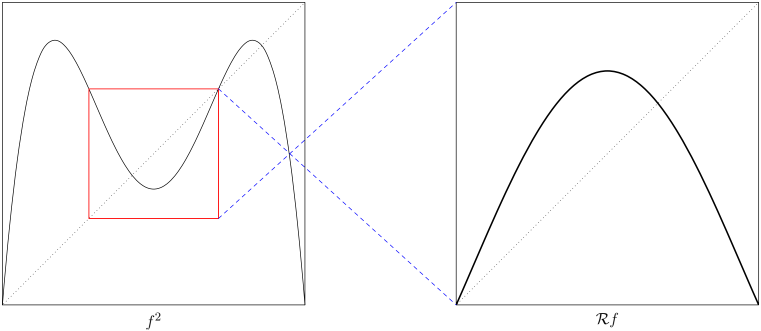


f^2

Ренормализация

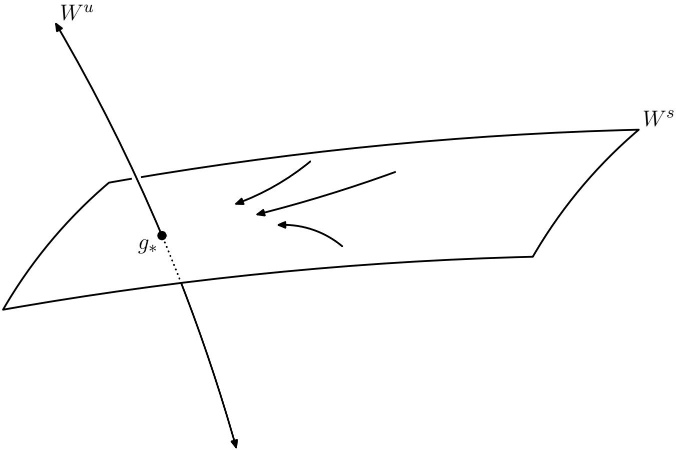


Ренормализация



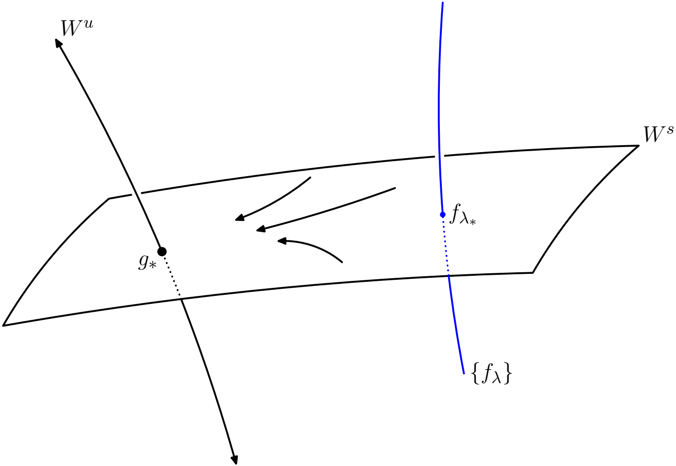
$\mathcal{R}$: преобразование пространства унимодальных отображений $[0, 1]$

Объяснение



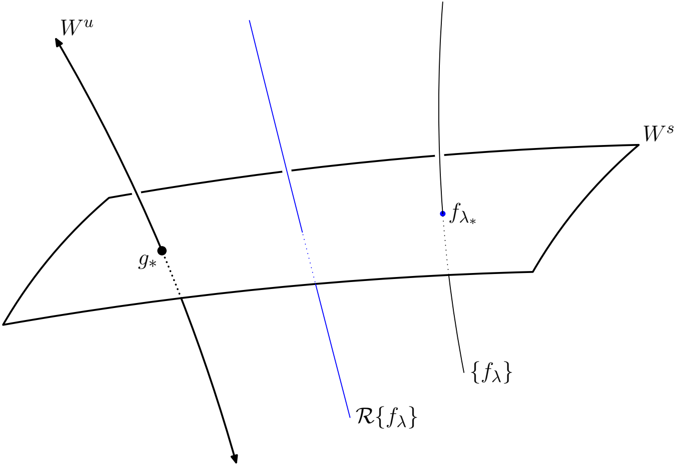
Существует гиперболическая неподвижная точка g_* преобразования $\mathcal{R}$

Объяснение



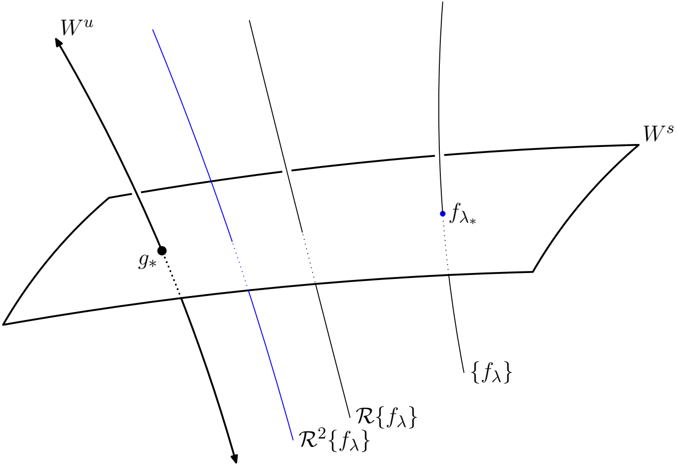
Семейство $\{f_\lambda\}$ пересекает $\mathrm{codim}\,1$ устойчивое многообразие в точке f_{λ_*}

Объяснение



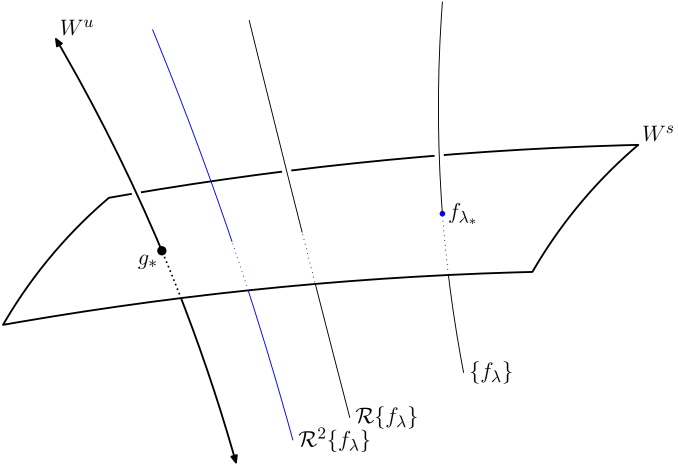
Семейство ренормализаций $\mathcal{R}^n f \dots$

Объяснение



...сходится к неустойчивому многообразию W^u точки g_*.

Объяснение



Поэтому δ это собственное значение линеаризации $\mathcal{R}$ в g_*!

Диск Зигеля...

$$z \mapsto \lambda z + z^2, \quad \lambda = e^{i\varphi}$$

Диск Зигеля...

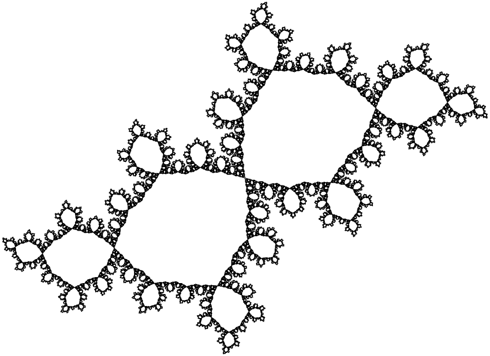


Image credit: Wikimedia Commons

$z \mapsto \lambda z + z^2, \quad \lambda = e^{i\varphi}$

... и КАМ-теория

Щели Кирквуда: на этих орбитах «почти нет» астероидов:

… и КАМ-теория

Щели Кирквуда: на этих орбитах «почти нет» астероидов:

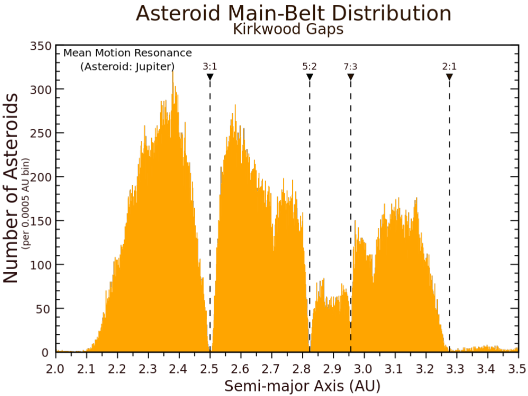


Image credit: Wikimedia Commons

Пример Бюффа-Черита

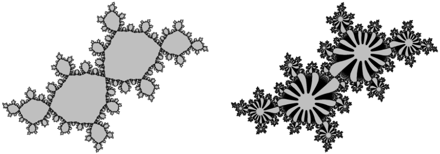


FIGURE 1. Two filled-in Julia sets K_α and $K_{\alpha'}$, with α' a well-chosen perturbation of α as in proposition 1. This proposition asserts that if α and α' are chosen carefully enough the loss of measure from K_α to $K_{\alpha'}$ is small.

Image credit: X. Buff, A. Cheritat, Quadratic Julia Sets with Positive Area

Можно ли нарисовать множество Жюлиа?

Теорема (М. Браверман, М. Ямпольский, Computability of Julia Sets)

- *Да, если речь о заполненном множестве Жюлиа для полинома.*

Можно ли нарисовать множество Жюлиа?

Теорема (М. Браверман, М. Ямпольский, Computability of Julia Sets)

- *Да, если речь о заполненном множестве Жюлиа для полинома.*
- *Нет, если речь собственно о множестве Жюлиа.*

Ссылки

- Н. Долбилин, Множества Жюлиа, Квант, N1, 2008.
- Дж. Милнор, *Голоморфная динамика*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000.
- M. Lyubich, The quadratic family as a qualitatively solvable model of chaos, *Notices Amer. Math. Soc.* **47**:9 (2000), pp. 1042–1052.
- П.Х. Рихтер, Х.-О. Пайтген, *Красота фракталов*, М.: Мир, 1993.
- X. Buff, A. Chéritat, Quadratic Julia sets with positive area, *Annals of Math.*, **176**:2 (2012), pp. 673–746.
- M. Braverman, M. Yampolsky, *Computability of Julia Sets*, In: Algorithms and computation in mathematics, Springer, 2009.

Видео:

- A. Avila, Dynamics of renormalization operators, plenary talk at ICM2010.
- Veritasium
- Numberphile: 1, 2, 3.

Спасибо за внимание!