Решения задач первого дня.

1. У реки живет племя Мумбо-Юмбо. Однажды со срочным известием в соседнее племя одновременно отправились молодой воин Мумбо и мудрый шаман Юмбо. Мумбо побежал со скоростью 11 км/ч к ближайшему хранилищу плотов, и затем поплыл на плоту в соседнее племя. А Юмбо, не торопясь, со скоростью 6 км/ч, пошел к другому хранилищу плотов и поплыл в соседнее племя оттуда. В итоге Юмбо приплыл раньше, чем Мумбо.

Река прямолинейна, плоты плывут со скоростью течения. Эта скорость всюду одинакова и выражается целым числом км/ч, не меньшим 6. Каково наибольшее возможное её значение? (*М. Евдокимов, в редакции Л. Самойлова*)

Ответ. 26 км/ч.

Решение. Обозначим место обитания племени Мумбо-Юмбо через O, хранилище, к которому побежал Мумбо, через M, а хранилище, к которому пошел Юмбо, через U. Очевидно, что M находится выше по течению по сравнению с O, а U — ниже.

Пусть расстояния от O до M и U равны x и y км соответственно ($x < y$), скорость реки равна v км/ч. На путь от O до U Юмбо затратил $\frac{y}{6}$ часов, а Мумбо $\frac{x}{11} + \frac{x+y}{v}$ часов. Ясно, что в соседнее племя Юмбо приплывает раньше Мумбо тогда и только тогда, когда $\frac{y}{6} < \frac{x}{11} + \frac{x+y}{v}$. Так как $x < y$, из этого неравенства следует, что $\frac{y}{6} < \frac{y}{11} + \frac{y+y}{v}$. Сократив на y и преобразовав, получаем $v < 26{,}4$.

Осталось проверить, что скорость реки могла равняться 26 км/ч. Для этого в неравенстве $\frac{y}{6} < \frac{x}{11} + \frac{x+y}{v}$ положим $v = 26$ и равносильно преобразуем его к виду $\frac{y}{x} < \frac{111}{110}$. Последнее возможно (например, при $y = 1{,}12$ км, $x = 1{,}11$ км), что и завершает решение.

2. При всяком ли натуральном n, большем 2009, из дробей $\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2} \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами? (*А. Шаповалов, К. Кноп*)

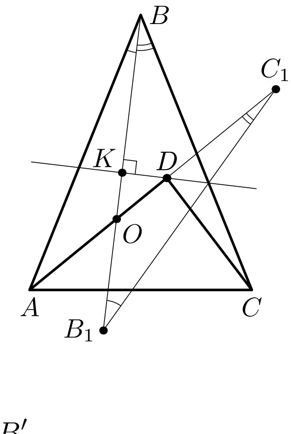
Ответ. Да.

Решение. Каждая из данных дробей имеет вид $\frac{n+1-a}{a} = \frac{n+1}{a} - 1$, где $1 \leqslant a \leqslant n$. Стало быть, нам требуется найти такие различные натуральные числа a, b, c и d, не большие 2009, для которых $\left(\frac{n+1}{a} - 1\right) + \left(\frac{n+1}{b} - 1\right) = \left(\frac{n+1}{c} - 1\right) + \left(\frac{n+1}{d} - 1\right)$, что равносильно $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

Осталось подобрать дроби, удовлетворяющие этому равенству. Это можно сделать, взяв любое равенство двух сумм различных натуральных слагаемых, НОК которых не больше 2009, и поделив его на этот НОК. Например, равенство $1 + 4 = 2 + 3$, поделенное на 12, даёт $\frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$.

3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что угол ADC вдвое больше угла ABC. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом ADC, равно $AD + DC$. (*С. Берлов*)

Решение. Пусть ℓ — биссектриса углов, смежных с $\angle ADC$, точка K — проекция B на ℓ, а точки B' и C' симметричны соответственно точкам B и C относительно ℓ. Тогда $BB' = 2BK$ — как раз удвоенное расстояние от B до ℓ. Кроме того, точка D лежит на отрезке AC' (так как прямые DA и DC симметричны относительно ℓ), и $AC' = AD + DC' = AD + DC$. Далее, из той же симметрии получаем $\angle AC'B' = \angle DC'B' = \angle DCB$, $\angle BB'C' = \angle B'BC$.



Пусть отрезки BB' и AC' пересекаются в точке O. Из прямоугольного треугольника OKD получаем

$$\angle KOD = 90^\circ - \angle OKD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle COC') = \frac{1}{2}\angle ADC = \angle ABC.$$

Значит,

$$\angle ABB' = \angle ABC - \angle B'BC = \angle BOC' - \angle OB'C = \angle OC'B'.$$

Аналогично,

$$\angle BAO = \angle BOC' - \angle ABO = \angle ABC - \angle ABO = \angle B'BC = \angle BB'C'.$$

Таким образом, треугольники ABO и $B'C'O$ равны по стороне и двум прилежащим углам. Отсюда $BB' = BO + OB' = C'O + OA = AC' = AD + DC$, что и требовалось.

4. В стране Леонардии все дороги — с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго. (*Н.Гравин*)

Первое решение. Построим граф, вершины которого соответствуют жителям страны, причем две вершины соединены направленным ребром в том и только том случае, когда их города соединены дорогой (направление на ребре будет такое же, как и на дороге между городами). Для каждой вершины v обозначим через $f(v)$ разность количества ребер, входящих в v, и количества ребер, выходящих из v. Сумма величин $f(v)$ по всем вершинам графа равна 0, так как каждое ребро вносит в нее одну $+1$ и одну -1. Значит, найдется такая вершина u, что $f(u) \geqslant 0$. Остается лишь отметить, что $f(u)$ в точности равна разности первого и второго чисел для города, в котором живет u.

Второе решение. Для каждого города A обозначим через $n(A)$ число жителей в этом городе, а через $f(A)$ разность суммарного количества жителей в городах, дороги из которых входят в A, и суммарного количества жителей в городах, в которые выходят дороги из A (то есть в точности разность первого и второго чисел для города A). Если утверждение задачи неверно, то $f(A) < 0$ для каждого города A.

Обозначим через S сумму чисел $n(A)f(A)$ по всем городам страны. С одной стороны, $S < 0$ как сумма нескольких отрицательных чисел. С другой стороны, рассмотрим любую дорогу из A в B. В число $n(B)f(B)$ эта дорога «вносит вклад» $+n(B)n(A)$, а в число $n(A)f(A)$ — «вклад» $-n(A)n(B)$. Рассмотрев все дороги, получим, что $S = 0$. Противоречие.

Замечание. Отметим, что во втором решении мы использовали лишь тот факт, что «количество жителей города» — положительное число. Не требуется, чтобы оно было целым.