Решения задач второго дня.

5. Можно ли вместо звездочек вставить в выражение

$$\text{НОК}(*,*,*) - \text{НОК}(*,*,*) = 2009$$

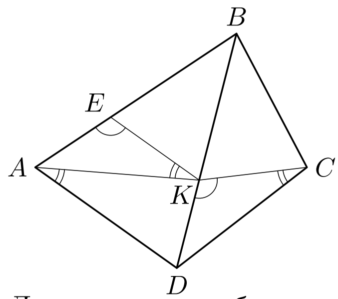
в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным? (*Р. Женодаров*)

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что такие числа нашлись. Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел делится на каждое из них и, следовательно, на каждый их делитель. Значит, если среди чисел, от которых находят НОК, есть чётное, то и НОК тоже будет чётным. Так как 2009 — нечётное число, то и одно из двух НОК будет нечетным; таким образом, все чётные числа должны оказаться в одном НОК.

Среди шести последовательных натуральных чисел есть три чётных и три нечётных, значит, один НОК будет находиться от трех последовательных чётных чисел, а другой — от трех последовательных нечётных чисел. Но в любой из этих троек чисел найдется число, кратное трем. Тогда оба НОК кратны трем, и их разность делится на 3. Но 2009 на 3 не делится — противоречие.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$, $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$. (*С. Берлов*)



Решение. Отложим на стороне AB отрезок $BE = BC$. Равнобедренные треугольники EBK и KBC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $EK = KC$, а $\angle AEK = 180° - \angle BEK = 180° - \angle BKC = \angle CKD$. Кроме того, $KD = BD - BK = BA - BE = EA$. Следовательно, треугольники AEK и DKC равны, откуда $\angle KCD = \angle EKA$. Далее, поскольку оба треугольника BEK и BAD — равнобедренные, $\angle BEK = 90° - \angle EBD/2 = \angle BAD$. Поэтому $AD \parallel EK$, откуда $\angle KAD = \angle EKA = \angle KCD$.

7. На столе лежит 10 кучек с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 орехами. Двое играющих берут по очереди по одному ореху. Игра заканчивается, когда на столе останется 3 ореха. Если это — три кучки по одному ореху, выигрывает тот, кто ходил вторым, иначе — его соперник. Кто из игроков может выигрывать, как бы не играл соперник? (*И. Рубанов, А. Шаповалов*)

Ответ. Первый.

Первое решение. Назовем кучки из одного ореха единицами, а из двух — двойками. Первый должен придерживаться следующих правил: 1) если на доске есть единицы — убрать одну из них; 2) не брать из двоек. В остальном ходы первого могут быть любыми. Заметим, что число орехов в начале игры нечетно, значит, оно нечетно и перед любым ходом первого. Поэтому перед его ходом на столе всегда будет хотя бы одна нечетная кучка, то есть первый всегда сможет сделать ход, не нарушая описанных правил.

Теперь заметим, что после первого хода первого на столе нет единиц. После хода второго может появиться не более одной новой единицы, которую первый заберет. Значит, и после следующих ходов первого единиц на столе не будет, а после любого хода второго на столе будет не больше одной единицы. В частности, так будет и в конце игры, то есть первый выиграет.

Второе решение. Пусть первый каждым ходом берет орех из самой маленькой кучки. Тогда после 15-го хода первого исчезнут не менее 5 кучек. Итак, после ответного хода второго останется 15 орехов и не более 5 кучек. Если кучек ровно 5, то в наименьшей не больше 3 орехов. Поэтому в любом случае еще через 3 хода первого и второго останется 9 орехов и не более 4 кучек. Если кучек ровно 4, то в наименьшей не более 2 орехов. Значит, еще через 2 хода останется 5 орехов и не более 3 кучек. Если кучек ровно 3, то в наименьшей 1 орех. Значит, в любом случае после последнего хода первого останется не более всего 2 кучек, то есть он выиграет.

8. На бесконечной ленте выписаны в ряд числа. Первой идёт единица, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$-ом месте?

(*И. Богданов*)

Ответ. 3001.

Решение. Поскольку каждое число ряда, начиная со второго, больше предыдущего хотя бы на единицу, $9 \cdot 1000^{1000}$-ое его число не меньше $9 \cdot 1000^{1000}$, то есть в нём как минимум 3001 цифра. Обозначим n-ое число ряда через a_n, и пусть k — наименьший номер такой, что в числе a_k 3002 цифры. Если мы докажем, что $k > 9 \cdot 1000^{1000}$, то получим, что в $9 \cdot 1000^{1000}$-ом числе ряда не более 3001 цифры, то есть в нем ровно 3001 цифра.

Рассмотрим числа от 0 до $10^{3001} - 1$, не имеющие единиц в десятичной записи. Дополнив каждое слева нулями до 3001 знака, мы получим все последовательности длины 3001 из цифр, отличных от единицы. Таких последовательностей 9^{3001}. Значит, и среди чисел $a_1, \ldots, a_{k-1}$ не более 9^{3001} чисел, не имеющих единицы в десятичной записи (так как все они не превосходят $10^{3001} - 1$).

Рассмотрим теперь процесс получения числа a_k из a_1. На каждом из $k - 1$ шагов прибавляется число от 1 до 9, причём количество шагов, на которых прибавляется не единица, не превосходит 9^{3001}. Значит,

$$10^{3001} - 1 \leqslant a_k - a_1 \leqslant 9 \cdot 9^{3001} + 1 \cdot (k - 1 - 9^{3001}) = k - 1 + 8 \cdot 9^{3001},$$

откуда $k \geqslant 10^{3001} - 8 \cdot 9^{3001}$. Осталось показать, что $10^{3001} - 8 \cdot 9^{3001} > 9 \cdot 10^{3000}$. Для этого достаточно доказать, что $9^{3002} < 10^{3000}$. Заметим, что $9^7 = 4782969 < 5 \cdot 10^6$, откуда $9^{28} < 5^4 \cdot 10^{24} < 10^{27}$ и $9^{56} < 10^{54}$. Поэтому $9^{3002} = 9^{56} \cdot 9^{2946} < 10^{54} \cdot 10^{2946} = 10^{3000}$.