МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА. 2 ЭТАП.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

1. *Гриб называется плохим, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?*

Ответ. Могут. **Решение**. Пусть в каждом плохом грибе ровно 10 червей, а в хорошем червей нет. Далее, пусть из каждого плохого гриба по одному червю переползут в хорошие, по 9 в каждый. В результате в каждом грибе окажется по 9 червей, и все грибы будут хорошими.

2. *Точка K — середина гипотенузы AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC. Точки L и M выбраны на катетах BC и AC соответственно так, что BL = CM. Докажите, что треугольник LMK — также прямоугольный равнобедренный.*

Решение. Медиана CK треугольника ABC является также высотой и биссектрисой, так как треугольник равнобедренный. Поэтому $\angle KBC = \angle KCB = \angle KCA = 45$ градусов. Отсюда KC = KB, и, значит, треугольники KBL и KCM равны по двум сторонам (KC = KB, BL = CM) и углу между ними. Поэтому KL = KM, и из равенства $\angle BKL = \angle CKM$ следует $\angle LKM = \angle LKC + \angle CKM = \angle LKC + \angle BKL = \angle BKC = 90$ градусов. Значит, треугольник LMK — прямоугольный равнобедренный.

3. *По кругу выписаны числа 1, 2, 3, . . . , 10 в некотором порядке. Петя вычислил 10 сумм всех троек соседних чисел и написал на доске наименьшее из вычисленных чисел. Какое наибольшее число могло быть написано на доске?*

Ответ. 15. **Решение**. Вначале докажем, что выписанное число не больше 15. Выделим число 10, а оставшиеся 9 чисел разобьем на три тройки соседних чисел. Сумма чисел в этих трех тройках равна 1+2+3+. . .+9 = 45, поэтому хотя бы в одной из рассматриваемых троек сумма чисел не больше, чем 45: 3 = 15. Пример расстановки чисел, при котором число, выписанное Петей, равно 15, таков: 1-5-9-2-7-6-8-3-4-10-(1). Приведенный пример — не единственный!

4. *Имеются чашечные весы и 100 монет, среди которых несколько (больше 0, но меньше 99) фальшивых монет. Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие тоже весят одинаково, при этом фальшивая монета легче настоящей. Можно делать взвешивание на весах, заплатив перед взвешиванием одну из монет (неважно, фальшивую или настоящую). Докажите, что можно с гарантией обнаружить настоящую монету.*

Решение. Отложим одну монету. Поскольку из условия следует, что настоящих монет не меньше двух, среди оставшихся 99 монет есть хотя бы одна настоящая. Занумеруем эти монеты и взвесим первую со второй, заплатив за взвешивание отложенной монетой. Если одна из монет перевесила, то она — настоящая, и задача решена. Если веса первой и второй монет равны, сравним вторую монету с третьей, заплатив за взвешивание первой монетой. Если одна из монет перевесила, задача решена. Иначе взвесим третью монету с четвёртой, заплатив за это второй монетой и т.д. Если в какой-то момент одна из монет перевесит — задача решена. Если же все 98 взвешиваний дали равновесие, то все 99 пронумерованных монет весили одинаково, и, поскольку среди них была настоящая, все они, в том числе и две оставшихся после 98-го взвешивания — настоящие.

5. *На столе лежат 7 карточек с цифрами от 0 до 6. Двое по очереди берут по одной карточке. Выигрывает тот, кто впервые из своих карточек сможет составить натуральное число, делящееся на 17. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его противник?* (И. Рубанов)

Ответ. Начинающий. **Решение**. Обозначим игроков A (начинающий) и B (его противник). Приведем стратегию, позволяющую A гарантированно выиграть. Пусть он возьмет первым ходом цифру 3; тогда B вынужден брать 4 (иначе A вторым ходом ее возьмет и выиграет, составив число 34). Заметим, что тогда вторым своим ходом B не выиграет, ибо единственное двузначное число, содержащее 4 в своей записи и делящееся на 17 — это 34.

Далее А возьмет 1, тогда В должен брать 5 (действительно, иначе этим ходом он не выиграет, а следующим ходом А возьмет 5 и составит 51). Тогда следующим ходом А возьмет 6 и выиграет, составив число 136. Существуют и другие выигрышные стратегии для А.

Критерии. Только верный ответ — 0 баллов. Приведена стратегия, не работающая хотя бы при одном варианте хода соперника — 0 баллов.

6. *В трех клетках клетчатого листа записаны числа, а остальные клетки пусты. Разрешается выбрать два числа из разных непустых клеток и записать в пустую клетку их сумму; также можно выбрать числа a, b, c из трех разных непустых клеток и записать в пустую клетку число* $ab+c^2$. *Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно записать в одну из клеток квадрат суммы трех исходных чисел (какими бы они ни были).*

Решение. Пусть записаны числа a, b, c. Последовательно составим $a+b$, $b+c$, $a+c$, $(a+b)c+a^2$, $(b+c)a+b^2$, $(c+a)b+c^2$, $(a+b)c+a^2+b+c)a+b^2$ и $(a+b)c+a^2+b+c)a+b^2)+(c+a)b+c^2 = (a+b+c)^2$. Задачу можно решить и многими другими способами.

7. *В выпуклом четырехугольнике ABCD некоторая точка диагонали AC принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а некоторая точка диагонали BD принадлежит серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. Докажите, что ABCD — прямоугольник.*

Решение. Пусть E — точка на диагонали AC, принадлежащая серединным перпендикулярам к сторонам AB и CD, а F — некоторая точка диагонали BD, принадлежащая серединным перпендикулярам к сторонам AD и BC. По неравенству треугольника имеем $EB+ED \geq BD$, $FA+FC \geq AC$.Из условия следует, что $EA = EB$, $EC = ED$, $FA = FD$, $FB = FC$. Отсюда $AC = EA+EC = EB+ED \geq BD$. Аналогично, $BD \geq AC$, откуда $EB+ED = BD = AC = EA+EC$. Поскольку $EB+ED = BD$ только когда точка E лежит на отрезке BD, точка E лежит на обеих диагоналях четырёхугольника $ABCD$, те есть является точкой их пересечения. Аналогично, точкой пересечения диагоналей является точка F, откуда $E = F$. Но это значит, что $EA = EB = EC = ED$. Таким образом, диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны и точкой своего пересечения делятся пополам, откуда и следует, что $ABCD$ — прямоугольник.

8. *В футбольном турнире участвовало 8 команд, причем каждая сыграла с каждой ровно по одному разу Известно, что любые две команды, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное число очков. Найдите наибольшее возможное общее число ничьих в этом турнире. (За выигрыш матча команде начисляется 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.)* (С. Токарев)

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	**X**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**	**3**
B	**1**	**X**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**3**
C	**1**	**1**	**X**	**3**	**0**	**1**	**1**	**1**
D	**1**	**1**	**0**	**X**	**3**	**1**	**1**	**1**
E	**1**	**1**	**3**	**0**	**X**	**1**	**1**	**1**
F	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**X**	**1**	**1**
G	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**X**	**1**
H	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**X**

Ответ. 22. **Решение**. Докажем, что ровно по 6 ничьих может быть не более, чем у двух команд. Действительно, любая такая команда имеет либо 6, либо 6 + 3 очка (в зависимости от того, выиграла или проиграла она свой результативный матч). Если таких команд три, то у двух из них поровну очков, значит, между собой они сыграли не вничью; этого не может быть, ибо они обе либо не выигрывали, либо не проигрывали ни одного матча. Также ясно, что максимум одна команда все свои 7 матчей сыграла вничью. Таким образом, сумма количеств ничьих у всех 8 команд не превосходит 7 + 6 + 6 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 44, а поскольку каждый ничейный матч учитывается дважды, то общее число ничьих в турнире не превосходит 44/2 = 22. Оно может равняться 22, как показано в таблице справа.