II олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап
Решения заданий первого дня.

1. Занумеруем все простые числа в порядке возрастания: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, … . Может ли среднее арифметическое $(p_1+\ldots+p_n)/n$ при каком-нибудь $n \geq 2$ быть простым числом? (*С. Волчёнков*)

Ответ: Нет. **Решение**. Пусть $(p_1+\ldots+p_n)/n = q \Leftrightarrow p_1+\ldots+p_n = nq$ (*), где q — простое число. Очевидно, если $n > 1$, то $q > 2$. Поэтому при чётном n левая часть равенства (*) нечётна, а правая — чётна, при нечётном n — наоборот. Следовательно, такое равенство невозможно. **Замечание**. Фактически мы доказали более сильное утверждение: среднее арифметическое не может быть никаким нечетным числом.

2. В Швамбрании некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причём если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами А и Б, то самолёты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолёты всех трёх компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трёх компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды. (*С. Берлов*)

Решение. Вылетим из любого города А первой компанией, попадем в город Б, из него вылетим второй компанией, далее третьей, затем снова первой, второй, третьей и т. д. Рассмотрим самый первый момент, когда на этом пути встретился город В, где мы уже были. Тогда кусок нашего пути от первого посещения города В до второго и будет искомым. В самом деле, если мы в первый раз вылетели из города В в город Г, то из Г сразу вернуться в В мы не могли. Поэтому между двумя посещениями города В мы совершили хотя бы три перелёта и, значит, воспользовались по пути рейсами всех трёх компаний.

3. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC и перпендикулярна стороне AD, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. На стороне AD взята точка K такая, что $AC = AK$. Биссектриса угла ADC пересекает BK в точке M. Найдите угол ACM. (*Р. Женодаров*)

Ответ: $\angle ACM = 45°$. **Решение**. Поскольку треугольник BAK — прямоугольный равнобедренный, $\angle AKB = 45°$. Пусть биссектриса угла CAD пересекает отрезок BK в точке N. Треугольники ANK и ANC равны: AN общая, $AC = AK$, $\angle CAN = \angle KAN$. Поэтому $\angle NCA = \angle NKA = 45°$. Поэтому CN — биссектриса прямого угла ACD, а N — точка пересечения биссектрис треугольника ACD. Таким образом, точка N лежит на биссектрисе угла ACD и на отрезке BK, то есть совпадает с точкой M. Следовательно, $\angle ACM = \angle ACN = 45°$.

4. В вершинах куба расставили числа 1^2, 2^2, …, 8^2 (в каждую из вершин — по одному числу). Для каждого ребра посчитали произведение чисел в его концах. Найдите наибольшую возможную сумму всех этих произведений. (*Д. Фон-дер-Флаасс*)

Ответ: 9420. **Решение**. Раскрасим вершины куба в два цвета так, чтобы концы каждого ребра были разноцветными. Пусть в вершинах одного цвета стоят числа a_1, a_2, a_3, a_4, а в вершинах другого — числа b_1, b_2, b_3, b_4, причём числа с одинаковыми номерами стоят в противоположных вершинах. Тогда, как легко проверить, указанная в условии сумма произведений будет равна $(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)$. По неравенству о средних

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)(b_1+b_2+b_3+b_4) \leq (a_1+a_2+a_3+a_4+b_1+b_2+b_3+b_4)^2/4 = (1^2+2^2+\ldots+8^2)^2/4 = 10404,$$

причём равенство достигается только при $a_1+a_2+a_3+a_4 = b_1+b_2+b_3+b_4$ (1). С другой стороны, сумма $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$, где a_i и b_i — числа 1^2, 2^2, …, 8^2, минимальна тогда, когда 8^2 умножается на 1^2, 7^2 — на 2^2, 6^2 — на 3^2, 5^2 — на 4^2 (2). В самом деле, пусть 8^2 умножается на $a^2 \neq 1^2$, а 1^2 — на b^2. Понятно, что умножив 8^2 на 1^2, а a^2 — на b^2, мы уменьшим сумму $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$. Затем аналогично показываем, что мы уменьшим сумму, умножив 7^2 на 2^2, и т.д.

Как ни удивительно, можно добиться *одновременного* выполнения условия максимальности (1) и условия минимальности (2): для этого надо в вершины одного цвета поставить числа 1^2, 4^2, 6^2 и 7^2, а в вершины другого — остальные таким образом, чтобы 8^2 и 1^2, 7^2 и 2^2, 6^2 и 3^2, 5^2 и 4^2 стояли в противоположных вершинах. Понятно, что такая расстановка и даст искомый максимум сумм произведений, равный $(1^2+4^2+6^2+7^2)^2-(8^2\cdot 1^2+7^2\cdot 2^2+6^2\cdot 3^2+5^2\cdot 4^2) = 102^2-984 = 9420$. **Замечание**. Тот факт, что числа 1^2, 2^2, …, 8^2 можно разбить на две группы по 4 числа с равными суммами чисел, не случаен. Заметим, что $(n+1)^2-n^2 = 2n+1$, поэтому $((n+3)^2-(n+2)^2)-((n+1)^2-n^2) = (2n+5)-(2n+1) = 4$ при любом n. Отсюда $(1^2-2^2-3^2+4^2)-(5^2-6^2-7^2+8^2) = 1^2-2^2-3^2+4^2-5^2+6^2+7^2-8^2 = 4-4 = 0$.

II олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10. Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырёх других томов. Всегда ли можно расставить все тома по возрастанию номеров? (*Д. Храмцов*)

Ответ: Да. **Решение**. Возьмём любой том. Он удалён не меньше, чем на 4 тома, либо от тома, стоящего первым, либо от тома, стоящего последним. Поэтому мы сможем поставить его либо на первое, либо на последнее место, а потом, если захотим, переставить с последнего на первое или наоборот. Поскольку место, на котором он *должен* стоять, удалено не меньше, чем на 4 тома, либо от первого места, либо от последнего, мы сможем следующим ходом поставить его на это место. Проделав описанную процедуру со всеми томами, кроме томов 1 и 10, мы поставим все их на свои места. Тома 1 и 10 окажутся после этого крайними, и мы получим расстановку томов по возрастанию номеров либо сразу, либо поменяв местами крайние тома.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD. Чему может быть равно отношение AD/AB? (*С. Берлов*)

Ответ: 2:3. **Решение**. Обозначим через M середину стороны CD. Рассмотрим на луче AB точку K, симметричную точке D относительно прямой AM. Поскольку $\angle ABC = \angle ADM = \angle AKM$, то $BC \parallel KM$ и точка K лежит на отрезке AB. Поскольку $CM = DM = KM$, то $\angle DKC = 90°$ и $KC \parallel AM$. Следовательно, у треугольников AKM и KBC стороны соответственно параллельны, поэтому они подобны с коэффициентом $k = KM/BC = 2$, откуда $AD = AK = 2KB$ и $AD:AB = 2:3$.

7. Докажите, что для произвольных a, b, c равенство $\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=0$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0$.

Решение. Раскрыв в левой части скобки и приведя подобные члены, легко показать, что

$$\left(\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}\right)(a+b+c)=\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b} \quad (*).$$

Поэтому если $\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=0$, то и $\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0$. Обратно, пусть $\frac{a^2(b-c)}{b+c}+\frac{b^2(c-a)}{c+a}+\frac{c^2(a-b)}{a+b}=0$. При $a+b+c \neq 0$, равенство $\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=0$ сразу получается из равенства (*). Если же $a+b+c = 0$, то

$$\frac{a(b-c)}{b+c}+\frac{b(c-a)}{c+a}+\frac{c(a-b)}{a+b}=\frac{a(b-c)}{-a}+\frac{b(c-a)}{-b}+\frac{c(a-b)}{-c}=(c-b)+(a-c)+(b-a)=0.$$

8. Среди 100 монет есть 4 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые — тоже, фальшивая монета легче настоящей. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну настоящую монету? (*А. Шаповалов*)

Решение. Приведем один из возможных способов. Разделим 100 монет на две группы (номер 1 и номер 2) по 33 монеты и одну группу (номер 3) из 34 монет. Первым взвешиванием положим на чаши весом группы 1 и 2. Если одна из чаш оказалась тяжелее другой, то на ней — не более одной фальшивой монеты. Тогда вторым взвешиванием можно сравнить любые две монеты из этой группы друг с другом: если одна из них тяжелее, то она настоящая, а если обе одинаковы, то обе являются настоящими. Если же после первого взвешивания оказалось, что две группы из 33 монет весят поровну, то это означает, что фальшивые монеты распределились по трем группам одним из таких способов: (0,0,4), (1,1,2) или (2,2,0). Второе взвешивание делаем так: добавим к одной из групп одну монету с другой чаши, а все остальные монеты с другой чаши снимем и заменим на 34 монеты из третьей группы. У этого взвешивания возможны три исхода. Первый: $1 + 33 < 34$. Это значит, что слева фальшивых монет больше, чем справа. Значит, имеет место случай (2,2,0), т.е. все 34 монеты — настоящие. Второй: $1 + 33 = 34$. Это значит, что фальшивых слева и справа поровну. Значит, имеет место случай (1,1,2), причем единственную фальшивую монету из второй кучки мы как раз переложили к первой кучке. Тогда все остальные 32 монеты из второй кучки — настоящие. Третий: $1 + 33 > 34$. Это значит, что имеет место либо случай (0,0,4), либо случай (1,1,2), в котором переложенная монета не является фальшивой. В обоих случаях переложенная монета — настоящая.