II МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий первого дня

1. *Однажды барон Мюнхгаузен, вернувшись с прогулки, рассказал, что половину пути он шёл со скоростью 5 км/ч, а половину времени, затраченного на прогулку — со скоростью 6 км/ч. Не ошибся ли барон?* (*И. Рубанов*)

Ответ. Ошибся. **Решение**. Решение. Если барон половину затраченного времени шёл со скоростью 6 км/ч, то со скоростью 5 км/ч он шёл, самое большее, вторую половину этого времени, то есть не дольше, чем со скоростью 6 км/ч. Но это означает, что барон, идя со скоростью 5 км/ч, прошёл меньшее расстояние, чем идя со скоростью 6 км/ч. Стало быть, со скоростью 5 км/ч он прошёл меньше половины пути.

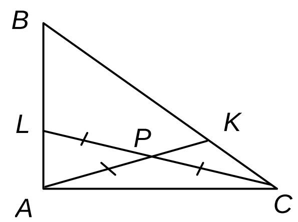
Замечание. В условии задачи не сказано, что Мюнхгаузен на прогулке шёл только со скоростью 5 или 6 км/ч: оно не исключает того, что часть времени он мог двигаться и с другими скоростями.

2. *Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.* (*Методкомиссия Всероссийской олимпиады*)

Решение. Решение. Подходят, например, числа от 3 до 9: заменим 3 на 2, 4 на 5, 5 на 6, а числа в каждой из пар (6, 7) и (8, 9) заменим друг на друга. В итоге получаем $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 8$.

Замечание. Если удалось изменить на 1 каждое из n идущих подряд натуральных чисел $m, \ldots, m+n-1$ так, чтобы их произведение сохранилось, то можно сделать то же самое и с $n+2$ идущими подряд натуральными числами $m, \ldots, m+n-1, m+n, m+n+1$: достаточно к подходящим заменам чисел $m, \ldots, m+n-1$ добавить замены $(m+n) \leftrightarrow (m+n+1)$. Именно так был построен пример из нашего решения: сначала найдены три подходящих числа 3, 4, 5, а потом к ним добавлены пары чисел 6, 7 и 8, 9. Добавляя следующие пары, мы получим примеры для любого нечётного количества идущих подряд натуральных чисел. Очевидным образом строятся примеры и для любого чётного количества идущих подряд натуральных чисел.

3. *На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в ее середине. Найдите острые углы треугольника ABC.* (*И. Богданов*)



Ответ. $\angle B = 54^\circ$, $\angle C = 36^\circ$. **Решение**. Обозначим середину биссектрисы CL через P, а угол ABC через β; тогда $\angle ACL = (90^\circ-\beta)/2$. В прямоугольном треугольнике ACL отрезок AP является медианой, поэтому $AP = CP = LP$. Теперь из равнобедренных треугольников APL и ABK получаем $\angle ALP = \angle LAP = \angle BAK = 180^\circ-2\angle ABK = 180^\circ-2\beta$. С другой стороны, $\angle ALP = \angle ABC+\angle LCB$ как внешний угол в ΔBCL. Значит, $180^\circ-2\beta = \beta+(90^\circ-\beta)/2$, откуда $5\beta/2 = 135^\circ$, то есть $\beta = 54^\circ$. Тогда $\angle ACB = 90^\circ-\angle ABC = 36^\circ$.

4. *Даны натуральные числа a и b, причем $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.* (*П. Кожевников*)

Решение. Предположим, что утверждение задачи неверно; тогда найдётся простое число p, входящее в разложение числа a^2 на простые множители с показателем меньшим, чем в разложение числа b. То есть, если a делится на p^k, но не делится на p^{k+1}, а b делится на p^m, но не делится на p^{m+1}, то $m > 2k$, а значит, $m \geq 2k + 1$. Но из делимости a^{21} на b^{10} следует, что $21k \geq 10m$. Отсюда $21k \geq 10(2k + 1)$, то есть $k \geq 10$. Но $a < 1000 < 2^{10} \leq p^{10} \leq p^k$, поэтому a не может делиться на p^k. Противоречие.

II МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий второго дня

5. *Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность (из большего вычел меньшее). В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.* (*Р. Женодаров*)

Решение. Запишем каждую из наших разностей со знаком плюс, если в соответствующей паре чисел большее стоит перед меньшим по часовой стрелке, и со знаком минус в противном случае. У нас получились 11 разностей между числом и следующим за ним по часовой стрелке; значит, сумма всех этих чисел равна нулю, то есть чётному числу. Это невозможно, поскольку среди них ровно семь нечётных чисел — четыре числа, равных 1 или –1, и три числа, равных 3 или –3.

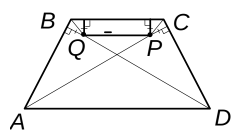
6. *В компании из шести человек любые пять могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.* (*С. Волчёнков*)

Решение. Заметим, что у каждого в компании не менее трёх знакомых. Действительно, если бы некто X был знаком менее, чем с тремя, то, исключив из компании одного из его знакомых, мы получили бы пятёрку людей, в которой у X не более одного знакомого, т. е. посадить их за круглый стол невозможно. Возьмём теперь любых пятерых и рассадим их за круглый стол. Шестой человек знаком, по крайней мере, с тремя из них; значит, он знаком с какой-то парой сидящих рядом людей. Если мы посадим шестого между ними, то получим требуемую рассадку.

7. *При каком наибольшем n можно раскрасить числа 1, 2, ..., 14 в красный и синий цвета так, чтобы для любого числа k = 1, 2, ..., n нашлись пара синих чисел, разность между которыми равна k, и пара красных чисел, разность между которыми тоже равна k?* (*Д. Храмцов*)

Ответ. $n = 11$. **Решение**. Очевидно, $n \leq 12$, поскольку существует лишь одна пара чисел с разностью 13. Предположим, что требуемое возможно при $n = 12$. Число 12 представляется в виде разности чисел от 1 до 14 ровно двумя способами: 13–1 и 14–2. Пусть для определенности число 1 — красное. Тогда число 13 тоже красное, а числа 2 и 14 — синие. Далее, существуют три пары с разностью 11: 12–1, 13–2, 14–3. Пара 13 и 2 разноцветная, значит, две остальных — одноцветные, поэтому число 12 красное (как и 1), а число 3 — синее. Продолжая таким образом рассматривать разности 10, 9, 8 и 7, на каждом шаге мы будем получать, что все возможные пары, кроме двух, уже разноцветные, и поэтому цвета еще двух чисел восстанавливаются однозначно. В итоге мы получим, что числа от 2 до 7 включительно — синие, а числа от 8 до 13 — красные. Но в таком случае число 6 не представляется в виде разности ни красных, ни синих чисел — противоречие. Следовательно, $n \leq 11$. Осталось показать, что n может равняться 11. Один из примеров выглядит так: числа 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12 — красные, а числа 14, 13, 11, 9, 7, 5, 3 — синие (расположение синих и красных чисел симметрично относительно середины отрезка [1, 14]). Есть и другие примеры.

8. *Биссектрисы углов A и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а биссектрисы углов B и D — в точке Q, отличной от P. Докажите, что если отрезок PQ параллелен основанию AD, то трапеция равнобокая.* (*Л. Емельянов*)



Решение. Обозначим через $\rho(X,YZ)$ расстояние от точки X до прямой YZ. Поскольку точка P лежит на биссектрисе угла C, имеем $\rho(P,BC) = \rho(P,CD)$. Аналогично, $\rho(Q,AB) = \rho(Q,BC)$. Но, поскольку $QP \parallel BC$, имеем $\rho(Q,BC) = \rho(P,BC)$, откуда $\rho(Q,AB) = \rho(P,CD)$ (см. рис.). Аналогично, $\rho(P,AB) = \rho(P,AD) = \rho(Q,AD) = \rho(Q,CD)$. Продолжим боковые стороны AB и CD до пересечения в точке S. Пусть точка P' симметрична Q относительно биссектрисы ℓ угла ASD. Тогда из симметрии $\rho(P',CD) = \rho(Q,AB) = \rho(P,CD)$ и $\rho(P',AB) = \rho(Q,CD) = \rho(P,AB)$. Таким образом, точки P и P' лежат внутри угла ASD на прямых, параллельных AB и CD и отстоящих от них на расстояния $\rho(P,AB)$ и $\rho(P,CD)$ соответственно. Так как эти прямые не параллельны, у них только одна точка пересечения; значит, $P' = P$, точки P и Q симметричны относительно биссектрисы угла ASD, и $\ell \perp PQ \parallel AD$. Итак, в треугольнике SAD биссектриса является высотой, углы при его основании равны, то есть трапеция $ABCD$ — равнобокая.