III олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап
Решения заданий первого дня.

1. Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ найдутся такие натуральные числа a, b, c, d, что $a+b = c+d = ab–cd = 4n$. (*С. Берлов*)

Решение. Положим $a = 2n+x$, $b = 2n–x$, $c = 2n+y$, $d = 2n–y$. Тогда равенство перепишется в виде $y^2–x^2 = 4n$. Теперь предположим, что $y+x = 2n$, $y–x = 2$. Получим $x = n–1$, $y = n+1$, откуда $a = 3n–1$, $b = n+1$, $c = 3n+1$, $d = n–1$.

2. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет? (*А. Шаповалов*)

Ответ. Не может. **Первое решение**. Заметим, что если между А и В сидят a человек, а между В и Б сидят b человек, то между А и Б сидит $a+b+1$ или $|a–b|–1$ человек. Поэтому если числа a и b имеют одинаковую чётность, то между А и Б сидит нечётное число человек. Допустим, есть человек В, имеющий хотя бы троих знакомых. Тогда среди них найдутся такие знакомые А и Б, что числа a и b имеют одинаковую чётность, и у них будет общий знакомый В, хотя между ними сидит нечётное число человек. Если же у каждого сидящего не более двух знакомых, то для каждого найдутся максимум двое, с которыми у него есть общие знакомые, а по условию таких должно быть 20 человек. **Второе решение**. Предположим противное. Возьмём любого из сидящих. Через четное число человек от него сидит 20 человек. Как было показано в первом решении, между собой эти люди сидят через нечетное число человек, поэтому не могут иметь общих знакомых. Значит, потребуется 20 *различных* общих знакомых взятого нами человека с этими людьми, то есть у каждого из сидящих есть среди них не меньше 20 знакомых. Но тогда, как легко видеть, у любых двух из сидящих есть общий знакомый — противоречие.

3. Имеются три литровых банки и мерка объемом 100 мл. Первая банка пуста, во второй — 700 мл сладкого чая, в третьей — 800 мл сладкого чая. При этом во второй банке растворено 50 г сахара, а в третьей — 60 г сахара. Разрешается набрать из любой банки полную мерку чая и перелить весь этот чай в любую другую банку. Можно ли несколькими такими переливаниями добиться, чтобы первая банка была пуста, а количество сахара во второй банке равнялось количеству сахара в третьей банке? (*В. Шевяков*)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Исходная концентрация сахара во второй банке составляет $50/700 = 1/14$, а в третьей — $60/800 = 3/40$. Поскольку $3/40 > 1/14$, после любых переливаний концентрация сахара в каждой непустой банке будет не больше 3/40. Заметим, что по условию после любых переливаний количество чая в каждой банке кратно 100 мл. Поэтому если весь чай оказался во второй и третьей банках, то в одной из них его не больше 700 мл. Допустим, в ней оказалась половина всего сахара. Тогда его концентрация в ней не меньше, чем $55/700 = 11/140 > 3/40$, что невозможно.

4. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $AB = CD$, выбрана точка P таким образом, что сумма углов PBA и PCD равна 180 градусам. Докажите, что $PB+PC < AD$. (*С. Берлов*)

Решение. Построим на продолжении луча PC за точку C точку K таким образом, что $CK = BP$. Тогда треугольники ABP и DCK будут равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $DK = AP$ и $\angle BAP = \angle CDK$. Построим параллелограмм $PKDL$. Так как $\angle ABC+\angle BCD > 180°$, то $\angle BAD+\angle ADC < 180°$, откуда $\angle APD = 180°–\angle PAD–\angle PDA > \angle BAP+\angle PDC = \angle PDK = \angle DPL$. Следовательно, луч PL пойдет внутрь угла APD. Но $AP = DK = LP$, поэтому точка D будет с той же стороны от серединного перпендикуляра к AL, что и точка L. Поэтому $AD > DL = PK = PC+PB$.

III олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. 100 идущих подряд натуральных чисел отсортировали по возрастанию суммы цифр, а числа с одинаковой суммой цифр — просто по возрастанию. Могли ли числа 2010 и 2011 оказаться рядом? (*С. Волчёнков*)

Ответ. Не могли. **Решение**. Пусть числа 2010 и 2011 оказались рядом. Это значит, что среди 100 взятых чисел 2010 — самое большое число с суммой цифр 3, а 2011 — самое маленькое число с суммой цифр 4. Но это значит, что среди взятых 100 идущих подряд натуральных чисел есть числа 2010 и 2011, но нет ни числа 2002, ни числа 2100, что, очевидно, невозможно.

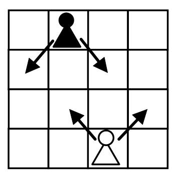
6. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $AC \parallel DE$, $CE \perp BC$. Докажите, что EC — биссектриса угла BED. (*П. Кожевников*)

Решение. Продлим отрезок DE до пересечения с прямой BC в точке K. Из условия следует, что $ABCD$ и $ADKC$ — параллелограммы, откуда $BC = AD = CK$. Таким образом, EC — медиана и высота, а, значит, и биссектриса в треугольнике BEK.

7. По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечетными знаменателями, большими 10^{10}. Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100? (*И. Богданов*)

Ответ. Не могло. **Первое решение**. Предположим противное. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — исходные дроби в порядке их следования по кругу, и знаменатель числа a_1 больше 10^{10}. Заметим, что $2a_1 = (a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_1)-(a_2+a_3)-(a_4+a_5)$. Последнее выражение есть алгебраическая сумма пяти дробей со знаменателями, не превосходящими 100. Очевидно, знаменатель в несократимой записи суммы не превосходит произведения знаменателей в несократимой записи слагаемых. Значит, знаменатель в несократимой записи $2a_1$ не больше $100^5 = 10^{10}$. С другой стороны, поскольку знаменатель a_1 нечётен, он равен знаменателю числа $2a_1$. Итак, он тоже не больше 10^{10} — противоречие. **Второе решение**. Снова обозначим наши числа $a_1, \ldots, a_5$. Пусть q — наименьшее общее кратное их знаменателей в несократимой записи, и $a_i = b_i/q$. Положим также $s_i = a_i+a_{i+1}$ (считая $a_6 = a_1$). Очевидно, $q > 10^{10}$. Пусть p — один из делителей числа q, причем q делится на p^k, но не на p^{k+1}. Покажем, что один из знаменателей в несократимых записях чисел s_i делится на p^k. Допустим, знаменатели чисел s_i не делятся на p^k. Тогда все b_i+b_{i+1} делятся на p. Поскольку одно из чисел b_i не делится на p, то и ни одно из них не делится, поскольку $b_1 \equiv -b_2 \equiv b_3 \equiv -b_4 \equiv b_5 \equiv -b_1 \pmod p$. Но отсюда следует также, что $2b_1$ делится на p, а этого не может быть, поскольку p нечётно. Из оказанного следует, что произведение знаменателей чисел s_i делится на q; но тогда оно больше 10^{10}, а, значит, один из сомножителей больше 100.

8. Какое наибольшее количество белых и чёрных пешек можно расставить на клетчатой доске 9x9 (пешку, независимо от её цвета, можно ставить на любую клетку доски) так, чтобы никакая не била никакую (в том числе и своего цвета)? Белая пешка бьет две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с бóльшим номером, а чёрная — две соседние по диагонали клетки на соседней горизонтали с меньшим номером (см. рисунок). (*А. Антропов*)



Ответ. 56. **Решение**. *Пример* с 56 пешками показан на рисунке. *Оценка*. Заметим, что в каждом прямоугольнике из трех строк и двух столбцов стоит не более 4 пешек. Действительно, если в нем стоит хотя бы 5, то тогда на одном из цветов заняты все три клетки и пешка из центральной строки бьет одну из двух оставшихся. Следовательно, в любом прямоугольнике из 9 строк и 8 столбцов стоит не более 48 пешек (так как его можно разбить на 12 прямоугольников 3×2). Допустим, нам удалось поставить 57 пешек. Тогда в девятом столбце должно стоять хотя бы 9 пешек, т.е. ровно 9. Но тогда в восьмом столбце стоит не более 2 пешек (так иначе нашлась бы пешка, стоящая не в первой и не в последней строке, которая бы била какую-то пешку из девятого столбца). Но тогда в восьмом и девятом столбцах вместе не более 11 пешек, а во 2-7 столбцах — не более 36 пешек (их можно разбить на 9 прямоугольников 3×2). Получается, что в первом столбце должно быть 10 пешек — противоречие.