IV олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап
Решения заданий первого дня.

1. *На стороне BC треугольника ABC взята точка D таким образом, что серединный перпендикуляр к отрезку AD проходит через центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через вершину треугольника ABC.* (Л. Емельянов)

Решение. Опустим из центра J вписанной в треугольник окружности перпендикуляр JN на сторону CB. Допустим, точка N лежит на отрезке DC (случай, когда точка N лежит на отрезке DB, разбирается аналогично.). Опустим из центра J перпендикуляр JM на сторону CA. Поскольку $JA = JD$ и $JM = JN$, прямоугольные треугольники JMA и JND равны. Поэтому $AM = DN$. Складывая это равенство с равенством $CM = CN$, получаем $CA = CD$. Осталось заметить, что серединный перпендикуляр к основанию AD равнобедренного треугольника CAD проходит через его вершину C, что и требовалось доказать.

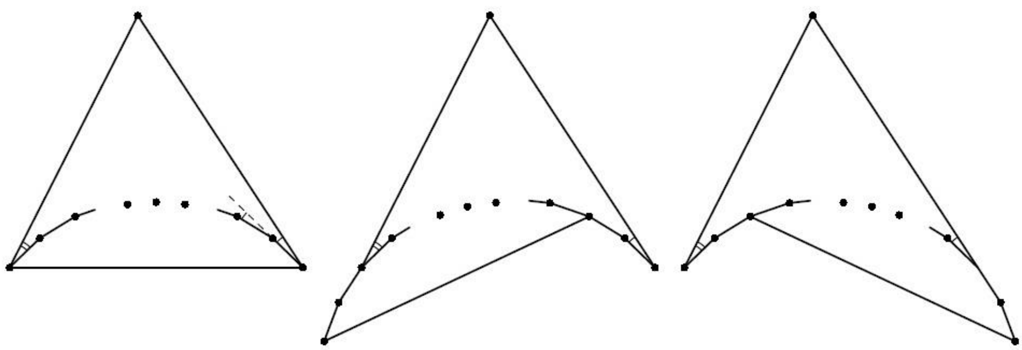
2. *Олег и Сергей по очереди выписывают слева направо по одной цифре, пока не получится девятизначное число. При этом нельзя выписывать цифры, которые уже выписаны. Начинает (и заканчивает) Олег. Олег побеждает, если полученное число кратно 4, в противном случае побеждает Сергей. Кто победит при правильной игре?* (О. Дмитриев, Р. Женодаров)

Ответ. Сергей. **Первое решение**. За первые три своих хода Сергей может добиться того, что обязательно будут использованы цифры 2 и 6 и еще какая-то чётная цифра, например, 0. Своим последним ходом Сергей ставит любую еще не использованную нечётную цифру. Если Олег последней поставит нечётную цифру, то число будет нечётным. Если же он поставит одну из оставшихся чётных — 4 или 8, то число будет чётно, но не кратно 4. В обоих случаях Олег проигрывает. **Второе решение**. За первые три своих хода Сергей может добиться того, что обязательно будут использованы цифры: 4,8,0. Тогда перед его последним ходом возможны два варианта. Первый: ещё не использована цифра 2. Тогда он ставит цифру 2 и Олег может поставить на конце числа только 6 (иначе число не делится даже на 2), но такое число не делится на 4. Второй: цифра 2 использована. Тогда осталась максимум одна чётная цифра — 6. Сергей ставит её, а если её нет, то любую оставшуюся цифру. Тогда Олег вынужден ставить нечётную цифру и число не делится даже на 2.

3. *В каждую клетку таблицы 2012×2012 вписан либо нуль, либо единица, причем в каждом столбце и каждой строке есть как нули, так и единицы. Докажите, что в этой таблице найдутся две строки и два столбца такие, что на концах одной из диагоналей образованного ими прямоугольника стоят нули, а другой — единицы.* (И. Рубанов + жюри)

Решение. Рассмотрим строку C_1, в которой больше всего единиц. В ней есть клетка X, в которой стоит нуль, а в столбце, где стоит клетка X — клетка Y, в которой стоит единица. Если в строке C_2, где стоит клетка Y, под какой-то единицей строки C_1 стоит нуль, то все доказано: искомыми строками будут C_1 и C_2, а столбцами — тот, где стоят клетки X и Y, и тот, где под единицей в C_1 стоит нуль в C_2. Если же под каждой единицей строки C_1 в строке C_2 тоже стоит единица, то в строке C_2 больше единиц, чем в строке C_1, что противоречит выбору строки C_1.

4. *Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?* (С. Волчёнков, С. Берлов, И. Богданов)



Решение. Предъявим пример таких многоугольников. Пусть многоугольник $M = A_1A_2...A_{51}$ таков, что $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{50}A_{51}$ и $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 = ... = \angle A_{49}A_{50}A_{51} = 179°$. Построим треугольник $A_1A_{51}B$, содержащий M и такой, что $\angle A_{50}A_{51}B = 1°$, а $\angle BA_1A_2 > 1°$. Мы утверждаем, что M и $N = BA_1A_2... A_{51}$ — пара требуемых многоугольников.

M и N в объединении дают треугольник. Чтобы получить $(2k+1)$-угольник (при $2 \le k \le 49$), повернём M так, чтобы отрезок A_kA_{k+1} перешёл в отрезок A_1A_2; обозначим полученный многоугольник через $M' = C_1... C_{51}$. Тогда в объединении многоугольники M' и N дадут многоугольник $BC_kC_{k-1}... C_1A_{52-k}A_{53-k}... A_{51}$ с $2k+1$ вершиной. Чтобы получить $2k$-угольник (при $2 \le k \le 50$), повернём M так, чтобы отрезок A_1A_2 перешёл в отрезок A_kA_{k+1}; обозначим полученный многоугольник через $M'' = D_1 \dots D_{51}$. Тогда точка $D_{52-k} = A_{51}$ окажется на отрезке $D_{53-k}B$, поэтому в объединении многоугольники M'' и N дадут многоугольник $BA_1A_2 \dots A_kD_{51}D_{50} \dots D_{53-k}$ с $2k$ вершинами.

На рисунках показано, как получаются 3-, 7- и 6-угольники.

IV олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап
Решения заданий второго дня.

5. *Можно ли расставить на ребрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?* (Д. Храмцов)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Допустим, так расставить числа удалось. Тогда сумма всех чисел на любых двух противоположных гранях нечетна. Сложив все три такие суммы, получим нечетный результат. Но в этом результате каждое ребро учтено ровно два раза, поскольку лежит в двух гранях куба, поэтому он должен быть четным. Противоречие.

6. *Существуют ли такие различные натуральные числа a, b и c, что число a+1/a равно полусумме чисел b+1/b и c+1/c?* (А. Голованов)

Ответ. Нет. **Решение**. Допустим, такие числа нашлись. Заметим, что если m и n — натуральные числа и $m < n$, то $m+1/m \le m+1 \le n < n+1/n$. Поэтому мы (поменяв, если нужно, местами числа b и c) можем считать, что $b < a < c$. Перепишем условие в виде $(a–b)+(1/a–1/b) = (c–a)+(1/c–1/a)$. Поскольку каждое из чисел $1/a–1/b$ и $1/c–1/a$ отрицательно и больше $–1$, а числа $a–b$ и $c–a$ — целые, имеем $a–b = c–a$ и $1/a–1/b = 1/c–1/a$. Поделив первое из этих двух уравнений на второе, получим $–ab = –ac$, откуда $b = c$ — противоречие.

7. *Углы треугольника ABC удовлетворяют условию 2∠A+∠B = ∠C. Внутри этого треугольника на биссектрисе угла A выбрана точка K такая, что BK = BC.* Докажите, что $\angle KBC = 2\angle KBA$. (С. Берлов)

Первое решение. Поскольку $\angle C > \angle A+\angle B$, то $\angle C > 90°$. Выберем на луче AC точку T таким образом, что $BC = BT$. Заметим, что $\angle ATB = \angle BCT = \angle A+\angle B$. Поскольку $2\angle A+\angle B = \angle C$, имеем $3\angle A+2\angle B = \angle A+\angle B+\angle C = 180°$, откуда $\angle CBT = \angle A \Rightarrow \angle ABT = \angle A+\angle B = \angle ATB$. Значит, точка K лежит на оси симметрии равнобедренного треугольника BAT, откуда $BK = KT$. Итак, $BT = BC = BK = KT$, то есть треугольник BKT — равносторонний, откуда $\angle KBC = 60°–\angle CBT = 60°–\angle A$, а $\angle ABK = 30°–\angle BAK = 30°–\angle A/2 = \angle KBC/2$. **Второе решение**. Выберем точку L на биссектрисе угла A внутри треугольника таким образом, чтобы выполнялось условие $\angle LBC = 2\angle LBA$. Чтобы доказать, что точки L и K совпадут, достаточно доказать, что $BL = BC$. Пусть биссектриса угла CBL пересекает AC в точке N. Тогда $\angle BNC = \angle A+2\angle B/3 = \angle A/3+\angle B/3+(\angle B/3+2\angle A/3) = (\angle A+\angle B+\angle C)/3 = 60°$. Заметим, что L — точка пересечения биссектрис треугольника ABN. Значит, $\angle LNB = 60°$, и треугольники BCN и BLN равны по стороне BN и двум прилежащим к ней углам, откуда и следует равенство $BL = BC$.

8. *Пусть n — натуральное число, большее 1. У Кости есть прибор, устроенный так, что если в него положить 2n+1 различных по весу монет, то он укажет, какая из монет — средняя по весу среди положенных. Барон Мюнхгаузен дал Косте 4n+1 различных по весу монет и про одну из них сказал, что она является средней по весу. Как Косте, использовав прибор не более n+2 раз, выяснить, прав ли барон?* (К. Кноп)

Решение. Пусть M — монета, которую барон считает средней по весу. Костя может действовать по следующему алгоритму:

0. Счетчик повторов установим равным 0. Положим в прибор монету M и еще какие-то $2n$ монет.

1. Пока значение счетчика не достигло n, делаем следующее: если прибор укажет на M как среднюю, то перейдем к шагу 2; если прибор укажет на другую монету, то выкинем ее из прибора, добавим в прибор любую из остальных (не выкинутых ранее) монет, увеличим счетчик повторов на 1 и вернемся к шагу 1; если счетчик повторов равен n, то барон не прав. Конец.

2. Оставим в приборе монету M и заменим все остальные $2n$ монет (на все прочие $2n$ монет). Если прибор снова покажет на M как на среднюю, то барон прав, иначе — не прав.

Обоснование вывода, сделанного на шаге 2. Если M — средняя по весу в двух последних тестированиях, то в каждом из них были n монет легче M и n монет тяжелее M. Значит, всего есть $2n$ монет легче M и $2n$ монет тяжелее. Следовательно, M — средняя по весу. Если же в предпоследнем тестировании M средняя, а в последнем нет, то M тяжелее, чем ровно $n+x$ монет, где x не равно n, — а, значит, точно не средняя по весу из всех монет.

Обоснование вывода, сделанного в конце шага 1. Пусть в i-ом тестировании было x_i монет легче монеты M. Без ограничения общности можно считать, что при первом тестировании M была тяжелее средней монеты, то есть $x_1 > n$. Далее, если добавленная после i-го тестирования монета легче M, то $x_{i+1} = x_i$, иначе $x_{i+1} = x_i–1$. Если счетчик повторов достиг n, это значит, что мы выкинули n монет, и при этом x_i никогда не становилось равным n. Но тогда все x_i больше n, и, в частности, $x_n > n$. Так как уже найдены x_n не выкинутых и n выкинутых монет, которые легче M, и $x_n+n > 2n$, то M — точно не средняя.