**IV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА**
**3 (заключительный) этап, 26-29 марта 2012 г.**

---

# *Первый день.*

**1.** На стороне $BC$ треугольника $ABC$ взята точка $D$ таким образом, что серединный перпендикуляр к отрезку $AD$ проходит через центр вписанной в треугольник $ABC$ окружности. Докажите, что этот перпендикуляр проходит через вершину треугольника $ABC$.

**2.** Олег и Сергей по очереди выписывают слева направо по одной цифре, пока не получится девятизначное число. При этом нельзя выписывать цифры, которые уже выписаны. Начинает (и заканчивает) Олег. Олег побеждает, если полученное число кратно 4, в противном случае побеждает Сергей. Кто победит при правильной игре?

**3.** В каждую клетку таблицы $2012\times2012$ вписан либо нуль, либо единица, причем в каждом столбце и каждой строке есть как нули, так и единицы. Докажите, что в этой таблице найдутся две строки и два столбца такие, что на концах одной из диагоналей образованного ими прямоугольника стоят нули, а другой — единицы.

**4.** Существуют ли два многоугольника (не обязательно выпуклых), обладающих следующим свойством: прикладывая их друг к другу (без наложения), можно получить многоугольники с любым числом сторон от 3 до 100 включительно?

**IV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА**
**3 (заключительный) этап, 26-29 марта 2012 г.**

---

# *Второй день.*

**5.** Можно ли расставить на ребрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?

**6.** Существуют ли такие различные натуральные числа $a$, $b$ и $c$, что число $a+\frac{1}{a}$ равно полусумме чисел $b+\frac{1}{b}$ и $c+\frac{1}{c}$?

**7.** Углы треугольника $ABC$ удовлетворяют условию $2\angle A+\angle B = \angle C$. Внутри этого треугольника на биссектрисе угла $A$ выбрана точка $K$ такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KBC = 2\angle KBA$.

**8.** Пусть $n$ — натуральное число, большее 1. У Кости есть прибор, устроенный так, что если в него положить $2n+1$ различных по весу монет, то он укажет, какая из монет — средняя по весу среди положенных. Барон Мюнхгаузен дал Косте $4n+1$ различных по весу монет и про одну из них сказал, что она является средней по весу. Как Косте, использовав прибор не более $n+2$ раз, выяснить, прав ли барон?