IV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, критерии проверки

1. *Назовем четырехзначное число x забавным, если каждую его цифру можно увеличить или уменьшить на 1 (при этом цифру 9 можно только уменьшать, а 0 — только увеличивать) так, чтобы в результате получилось число, делящееся на x.*

а) *Найдите два забавных числа.* ***б)*** *Найдите три забавных числа.*

в) *Существует ли четыре забавных числа?* (С. Берлов)

Ответ. Существуют четыре забавных числа: 1111, 1091, 1109, 1089. **Замечание**. Покажем, что других забавных чисел нет. Заметим, что получившееся после изменения цифр число y не меньше, чем x, и не равно x, но его первая цифра может быть больше первой цифры числа x только на 1. Такое, как легко видеть, возможно только если число x начиналось на 1 и $y = 2x$. При этом число y должно начинаться на 2, то есть при умножении x на 2 «в столбик» переноса из разряда сотен в разряд тысяч не было.

Перебирая цифры от 0 до 9, находим, что если при умножении x на 2 «в столбик» в данный разряд нет переноса, то в нем могла стоять только 1 (которую затем увеличили на 1) или 9 (которую затем уменьшили на 1), а если перенос был, то только 0 (который затем увеличили на 1) или 8 (которую затем уменьшили на 1). Поэтому число x могло оканчиваться на 1 или 9, а в разряде десятков у него в первом случае могли быть 1 или 9, а во втором случае — 0 или 8. Содержимое разряда сотен в каждом из четырех получившихся случаев определяется однозначно, что и даёт четыре ответа.

Критерии. Все пункты оцениваются совместно. Если найдено только одно забавное число — *0 баллов*. Найдены два забавных числа — *2 балла*. Найдены 3 забавных числа — *4 балла*. Найдены все 4 забавных числа — *7 баллов*. Обоснования, что других забавных чисел нет, не требуется. За отсутствие обоснования, что найденные числа — действительно забавные, оценка не снижается. Если вместо забавных чисел выписаны их удвоения, а сами забавные числа не выписаны, оценка не снижается. Кроме забавных чисел в ответ включено постороннее число — *снимается 1 балл*.

2. *Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD — прямой и $BC+CD = AD$. Найдите отношение оснований $AD : BC$.* (Б. Обухов)

Ответ. $AD : BC = 2$. **Первое решение**. Отложим на стороне AD отрезок $AE = BC$. Тогда $ABCE$ — параллелограмм, а $ED = CD$. Поскольку $AB \parallel CE$, диагональ BD перпендикулярная AB, перпендикулярна и CE. Следовательно, она проходит через середину F основания CE равнобедренного треугольника CDE. Поскольку $EF = CF$, $\angle EFD = \angle BFC$ и $\angle BCF = \angle FED$, треугольники CFB и EFD равны. Поэтому $ED = BC = AE$, откуда и следует ответ. **Второе решение**. Выберем на стороне AD точку K так, что отрезок BK параллелен CD. Тогда $KD = BC$, и, значит, $AK = CD$. Кроме того, $BK = CD$ ($KBCD$ — параллелограмм), поэтому $AK = BK$ и, значит, высота KH треугольника AKB является медианой. Следовательно, KH — средняя линия прямоугольного треугольника ABD. Отсюда $AD = 2KD = 2BC$.

Критерии. Без доказательства (но с формулировкой!) используется факт, что точка на гипотенузе, равноудалённая от двух концов катета, является серединой гипотенузы — *снимается 3 балла*. Сделано дополнительное построение, с помощью которого можно получить решение (в частности, выбрана точка E или точка K, упомянутые в наших решениях, или основание BC продолжено за точку C на отрезок, равный CD или сторона DC продолжена за точку C на отрезок, равный BC), но дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.

3. *На столе лежат 100 одинаковых с виду монет, из которых 85 фальшивых и 15 настоящих. В вашем распоряжении есть чудо-тестер, в который можно положить две монеты и получить один из трех результатов — «обе монеты настоящие», «обе монеты фальшивые» и «монеты разные». Можно ли за 64 таких теста найти все фальшивые монеты?* (К. Кноп)

Ответ. Можно. **Решение**. Приведём один из возможных вариантов определения фальшивых монет. Разделим монеты на 50 пар и проверим все пары, кроме одной. Мы узнаем количество фальшивых в каждой паре. Поскольку общее число фальшивых монет известно, мы узнаем также, сколько фальшивых в оставшейся паре. Нам осталось выяснить, какая монета фальшивая в каждой из пар, состоящих из разных монет. Для этого заметим, что есть пара, в которой обе монеты фальшивые, потому что фальшивых монет больше 50. Возьмем монету из такой пары и протестируем с ней по одной монете из каждой пары, где обе монеты разные. Таких пар не более 15, поскольку у нас только 15 настоящих монет. Поэтому всего мы использовали не более 49+15=64 тестов.

Критерии. 1. Только ответ «можно» — *0 баллов*. 2. В решении есть две ключевых идеи. Первая: разбиваем 100 на 50 пар, делаем 49 попарных взвешиваний и показываем, что этого достаточно, чтобы поместить каждую пару (включая невзвешенную 50-ю) в один из трех классов — "2Ф", "2Н", "ФН". Второй: показываем, как можно найти все настоящие монеты максимум за 15 операций, если монеты уже разбиты на 50 пар, про каждую из которых известно, сколько в ней настоящих монет. Если в решении есть ровно одна из этих двух идей, оно оценивается *в 1 балл* (даже если вместо ответа 64 дан ответ 65). 3. То, что среди 50 пар монет обязательно найдется пара из двух фальшивых, а также то, что «худший случай» при нахождении настоящих монет — это тот, когда все они в разных парах, считаем очевидным, за отсутствие обоснований этих утверждений оценки не снижаем. Исключение — ситуация, когда при рассмотрении «худшего случая» используется специфика числа 15, и проведенные рассуждения не переносятся без изменений на случай 14 и 13 пар: в таком случае *снимается 1 балл*. Если в решении используются взвешивания монет из пар ФН, расположенных по циклу, и решение не проходит для случая одной пары ФН — *не более 4 баллов*.

4. ***Собственным делителем*** *числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа. С составным натуральным числом a разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011?* (С. Берлов)

Ответ. Неверно. **Решение**. Покажем, что наибольший простой делитель числа при указанных операциях не уменьшается, и потому мы никогда не получим число 2011 из составного числа, имеющего простой делитель, больший, чем 2011.

Заметим, что наибольший собственный делитель b составного числа a делится на наибольший простой делитель p этого числа. В самом деле, очевидно, $b = a/q$, где q — наименьший простой (и наименьший собственный) делитель числа a, и, поскольку $b > 1$, множитель p должен остаться в разложении частного a/q на простые сомножители (если $p = q$, это всё равно верно, поскольку тогда $a = p^n$, где $n > 1$). Поэтому если мы делим составное число на его наименьший собственный делитель q, то получаем частное b с тем же наибольшим простым делителем p. Если же мы к числу $a = bq$ прибавляем кратное bc наибольшего собственного делителя b, то получаем число $b(q+c)$, у которого наибольший простой делитель не меньше, чем наибольший простой делитель числа b, то есть не меньше p.

Критерии. Только ответ «неверно» — *0 баллов*. Только утверждение: "Если в числе есть простой делитель, больший 2011, то ничего не получится" без обоснования — *1 балл*. Утверждение: «Если в числе есть простой делитель, больший 2011, то ничего не получится, потому что наибольший простой делитель не уменьшается» без дальнейшего обоснования — *3 балла*. То же, плюс пояснение типа: «действительно, при делении наибольший простой делитель, очевидно, сохраняется, а при прибавлении — не уменьшается» без дальнейшего обоснования — *4 балла*. Если в работе не учтено, что при прибавлении наибольшего собственного делителя наибольший простой делитель может изменится — *не более 3 баллов*.

5. *Существуют ли 10 различных рациональных чисел таких, что произведение любых двух из них — целое число, а произведение любых трех — нет? Напомним, что рациональным называется число, равное отношению двух целых чисел.* (О. Подлипский)

Ответ. Нет. **Решение**. Предположим, что нашлись такие 10 чисел. Рассмотрим любые три из них: a, b, c. Тогда числа ab, bc, ca — целые, а число $abc = p/q$ — нет. Тогда и число $(abc)^2 = p^2/q^2$ нецелое. Но $(abc)^2 = (ab)(bc)(ca)$ — целое. Противоречие. **Замечание.**

Фактически доказано, что если все попарные произведения — целые, то и *все* произведения по три — целые.

Критерии. Ответ «не существуют» без обоснования — *0 баллов*. Тот факт, что если рациональное число не является целым, то не является целым и его квадрат, считать известным. За использование представлений рациональных чисел в виде несократимых дробей «по умолчанию» оценка не снижается. Сказано (при доказательстве от противного), что [для несократимых представлений] числитель каждой дроби должен делится на знаменатели всех остальных, без дальнейшего содержательного продвижения — *1 балл*. При доказательстве от противного неверно обосновывается, что числитель каждой дроби делится на знаменатели всех остальных, а затем из этого факта верно выводится противоречие — *снимаются 2 балла*.

6. *По кругу выложены черные и белые шары, причем черных в два раза больше, чем белых. Известно, что среди пар соседних шаров одноцветных пар втрое больше, чем разноцветных. Какое наименьшее число шаров могло быть выложено?* (Б. Трушин)

Ответ. 24. **Решение**. Так как чёрных шаров в два раза больше, чем белых, то общее количество шаров делится на три. Обозначим его через n. Все шары разбиваются на чередующиеся группы подряд идущих одноцветных шаров (группа может состоять и из одного шара). Так как цвета групп чередуются, то общее количество групп четно. Пусть количество групп каждого цвета равно k. Тогда разноцветных пар соседних шаров будет $2k$, а одноцветных $n - 2k$. Из условия задачи получаем, что $n - 2k = 3\cdot 2k$. Отсюда $n = 8k$. Таким образом общее количество шаров делится и на три и на восемь. Значит, n делится на 24, и потому $n \geq 24$. Примером может служить любой круг из 8 белых и 16 чёрных шаров, в котором по три чёрных и белых групп. Например, Например, белый – чёрный – белый – чёрный – шесть белых – четырнадцать черных.

Критерии. Только ответ — *0 баллов*. Ответ с примером на 24 шара без доказательства, что меньше 24 шаров быть не может — *2 балла*. Доказательство, что меньше 24 шаров быть не может, без примера на 24 шара — *4 балла*. За использование без верного обоснования того факта, что количество разноцветных пар четно, оценка *снижается на 1 балл*. Доказано, что число шаров делится на 12, без дальнейшего содержательного продвижения — *1 балл*.

7. *1000 различных положительных чисел записаны в ряд в порядке возрастания. Вася разбил эти числа на 500 пар соседних и нашел суммы чисел во всех парах. Петя разбил эти же числа на 500 пар таким образом, что между числами в каждой паре стоит ровно три других числа, и тоже нашел суммы чисел во всех парах. Докажите, что произведение сумм, найденных Петей, больше, чем произведение сумм, найденных Васей.* (С. Берлов)

Решение. *Лемма*. Пусть $a < d$, а $b < c$. Тогда $(a+b)(c+d) < (a+c)(b+d)$. *Доказательство*. $(a+c)(b+d) - (a+b)(c+d) = ab+cd-ac-bd = (a-d)(b-c) > 0$. *Решение задачи*. Разобьем всю тысячу чисел на 125 восьмёрок из идущих подряд чисел. Возьмем первую восьмерку: $a_1 < \ldots < a_8$. У Васи она даст суммы a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, a_7+a_8, у Пети — суммы a_1+a_5, a_2+a_6, a_3+a_7, a_4+a_8. По лемме $(a_1+a_2)(a_5+a_6) < (a_1+a_5)(a_2+a_6)$ и $(a_3+a_4)(a_7+a_8) < (a_3+a_7)(a_4+a_8)$. Осталось проделать то же самое для остальных 124 восьмерок и перемножить полученные неравенства. **Замечание.** Тот использованный при доказательстве леммы факт, что если $a < d$ и $b < c$, то $ab+cd > ac+bd$, достаточно широко известен под названием *транснеравенство*.

Критерии. Конкретные числовые примеры — *0 баллов*. Если утверждение леммы используется без всякого обоснования, решение оценивается *не выше, чем в 4 балла*. Ссылку на транснеравенство (из транснеравенства следует, что…) считать достаточным обоснованием леммы, за отсутствие подробностей оценку не снижать. Все числа разбиты на восьмерки последовательных, записаны нужные неравенства, дальнейшего содержательного продвижения нет — *1 балл*.

8. *В выпуклом четырехугольнике ABCD углы ABC и ADC прямые. На сторонах AB, BC, CD, DA взяты точки K, L, M, N соответственно так, что KLMN — прямоугольник. Докажите, что середина диагонали AC равноудалена от прямых KL и MN.* (Д. Швецов)

Решение. Рассмотрим треугольник KNT, у которого $KT \parallel BC$ и $NT \parallel CD$. Он равен треугольнику LMC по стороне $KN = LM$ и двум прилежащим углам. Следовательно, $KT = LC$, и $KTCL$ — параллелограмм, откуда $TC \parallel KL$ и $TC \perp KN$.

Пусть S и O — середины отрезков AT и AC соответственно, а n — серединный перпендикуляр отрезка KN. Так как $\angle ANT = \angle ADC = 90^\circ$ и $\angle AKT = \angle ABC = 90^\circ$, $NS = KS = AT/2$, то есть точка S равноудалена от K и N. Допустим, прямая AC совпадает с прямой TC. Тогда AC перпендикулярна KN и проходит через точку S. Значит, $AC = n$. Допустим, прямые AC и TC различны. Тогда SO — средняя линия треугольника ATC, и потому перпендикулярна KN. Значит, $SO = n$. В обоих случаях точка O оказывается на серединном перпендикуляре n, все точки которого равноудалены от прямых KL и MN.

Критерии. Специальных априорных критериев нет.