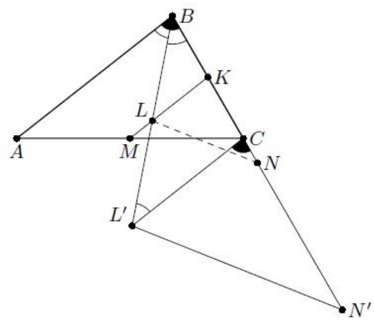
## VII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

## Решения заданий первого дня.

**1.** *Назовём* ***хорошими прямоугольниками*** *квадрат со стороной 2 и прямоугольник со сторонами 1 и 11. Докажите, что любой прямоугольник с целочисленными сторонами, большими 100, можно разрезать на хорошие прямоугольники.* (С. Волчёнков)

**Решение**. Прямоугольник $2n\times 2m$ разрежем на квадраты $2\times 2$. Прямоугольник $(2n+1)\times 2m$ сначала разрежем на прямоугольники $11\times 2m$ и $(2n-10)\times 2m$, потом первый разрежем на прямоугольники $1\times 11$, а второй — на квадраты $2\times 2$. Наконец, прямоугольник $(2n+1)\times(2m+1)$ сначала разрежем на прямоугольники $11\times(2m+1)$, $(2n-10)\times 11$ и $(2n-10)\times(2m-10)$, затем два первых прямоугольника разрежем на прямоугольники $1\times 11$, а последний прямоугольник — на квадраты $2\times 2$.

**2.** *В треугольнике $ABC$ сторона $AB$ больше стороны $BC$. На продолжении стороны $BC$ за точку $C$ отметили точку $N$ так, что $2BN = AB+BC$. Пусть $BS$ — биссектриса треугольника $ABC$, $M$ — середина стороны $AC$, а $L$ — такая точка на отрезке $BS$, что $ML \parallel AB$. Докажите, что $2LN = AC$.* (А. Антропов)




**Решение**. Продлим $BN$ за $N$ и $BL$ за $L$ на отрезки $NN' = BN$ и $LL' = BL$ соответственно. Так как $M$ — середина $AC$ и $ML \parallel AB$, прямая $ML$ содержит среднюю линию $MK$ треугольника $ABC$. Поскольку $L$ — середина $BL'$, эта прямая содержит также среднюю линию $LK$ треугольника $BCL'$; итак, $CL' \parallel LM \parallel AB$. Поэтому $\angle CL'B = \angle L'BA = \angle L'BC$, откуда $CL' = CB$. Далее, $CN' = BN'-BC = 2BN-BC = BA$ и $\angle N'CL' = \angle CBA$. Значит, треугольники $N'CL'$ и $ABC$ равны, и потому $AC = N'L' = 2LN$.

**3.** *По кругу написаны 2015 положительных чисел. Сумма любых двух рядом стоящих чисел больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.* (А. Голованов, С. Берлов)

**Решение**. Пусть по кругу стоят числа $x_1$, $x_2$, …, $x_{2015}$. Заметим, что $a+b > \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d} \Leftrightarrow (a+b)cd > c+d$ (*). Записав в форме (*) все 2015 данных в условии неравенств и перемножив их, получим неравенство $X\cdot(x_1x_2\ldots x_{2015})^2 > X$, где $X = (x_1+x_2)(x_2+x_3)\ldots(x_{2014}+x_{2015})(x_{2015}+x_1)$. Поделив обе части этого неравенства на $X$, получим неравенство $(x_1x_2\ldots x_{2015})^2 > 1$, откуда $x_1x_2\ldots x_{2015} > 1$.

**4.** *На каждой стороне квадрата выбрано по 100 точек, из каждой выбранной точки внутрь квадрата проведён отрезок, перпендикулярный соответствующей стороне квадрата. Оказалось, что никакие два из проведённых отрезков не лежат на одной прямой. Отметим все точки пересечения этих отрезков. При каком наибольшем $k < 200$ может случиться так, что на каждом проведённом отрезке лежит ровно $k$ отмеченных точек?* (Н. Авилов, И. Богданов)

**Ответ**. При $k = 150$. **Решение**. *Оценка*. Допустим, возможен пример с $k > 150$. Сопоставим ему таблицу $200\times 200$, строки которой соответствуют горизонтальным отрезкам (упорядоченным снизу вверх), а столбцы — вертикальным (упорядоченным слева направо). В ячейке таблицы стоит 1, если соответствующие отрезки пересекаются, и 0 — если нет. По нашему предположению в каждой строке и каждом столбце по $200-k < 50$ нулей. Заметим, что среди строк от 51 до 150 есть хотя бы одна, которая и начинается, и заканчивается на 1 (иначе мы имеем в первом и последнем столбцах вместе минимум 100 нулей). Соответствующий ей горизонтальный отрезок $T$ пересекает как самый левый, так и самый правый вертикальные отрезки. Но в этой строке есть и нолики, значит, некоторый отрезок $X$ «недотягивает» до $T$ сверху или снизу. Тогда в соответствующем отрезку $X$ столбце либо сверху, либо снизу от нашей строки стоят только нули, а, значит, их не менее 50. Противоречие. *Пример*. На рисунке справа. Каждый из отрезков изображает 50 параллельных и равных между собой отрезков примера.