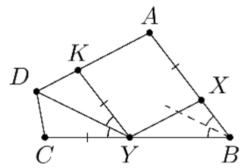
IX олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *Некоторое натуральное число a разделили с остатком на числа 1, 2, 3, …, 1000. Могло ли так случиться, что среди остатков ровно по 10 раз встретятся числа 0, 1, 2, 3, …, 99?* (С. Берлов)

Ответ. Не могло. **Решение**. Из условия следует, что все остатки от деления числа a на числа от 1 до 1000 меньше 100. Пусть остаток от деления числа a на 100 равен r. Тогда при делении a на любое число, кратное 100, должен получаться остаток вида $r+100k$, где k — неотрицательное целое число. Так как по условию остатки от деления a на 200, 300, ..., 900, 1000 не превосходят 99, все они тоже равны r. Но тогда такой же остаток получится и при делении a на любой делитель тысячи, больший 100, например, на 250. Таким образом, остаток r должен встречаться по крайней мере 11 раз, что противоречит условию задачи.

6. *В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы A и C равны 100°. На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что AX = CY. Оказалось, что прямая YD параллельна биссектрисе угла ABC. Найдите угол AXY.* (А. Кузнецов, С. Берлов)



Решение. Проведём через точку Y прямую, параллельную AB. Пусть она пересечёт AD в точке K. Тогда $\angle DYC = \angle DYK$ и $\angle C = 100° = \angle BAD = \angle YKD$, поэтому треугольники DYC и DYK равны по двум углам и стороне. Поэтому $YK = YC = AX$ и $AXYK$ — параллелограмм. Но тогда $\angle AXY = \angle AKY = 80°$.

7. *Дана окружность длины 90. Можно ли отметить на ней 10 точек так, чтобы среди дуг с концами в этих точках имелись дуги со всеми целочисленными длинами от 1 до 89?* (К. Кноп)

Ответ. Нельзя. **Решение**. 10 точек разбивают окружность на 90 дуг. Мы должны получить 45 дуг различной нечётной длины. Так как четных дуг 44, то дуг нечётной длины не более 90–44 = 46, при этом дуга длины 45 не может быть единственной, потому что это полуокружность. Следовательно, нам нужны ровно 46 нечётных дуг.

Возьмём любую из 10 точек в качестве начала отсчёта. Если дуга от нее до i-ой точки нечётна, то i-ую точку назовём *нечётной*, а в противном случае — *чётной*. Если всего есть k нечетных точек и $10–k$ чётных (включая начало отсчёта), то нечётные длины дуг будут ровно между нечётными и чётными точками, то есть их количество равно $2k(10–k)$. Но уравнение $2k(10–k) = 46$ не имеет целых решений, так как 23 — простое число, поэтому выбрать нужным образом 10 точек невозможно.

Замечание. На окружности длины 91 поставить 10 точек, обеспечив все различные дуги от 1 до 90, возможно. Одно из решений — перечислены расстояния между соседними точками — (1, 5, 4, 13, 3, 8, 7, 12, 2, 36).

8. *Дано нечётное натуральное число a, большее 100. На доску выписали все натуральные числа вида* $\frac{a-n^2}{4}$*, где n — натуральное число. Оказалось, что при* $n \le \sqrt{a/5}$ *все они простые. Докажите, что и каждое из остальных выписанных на доску натуральных чисел простое или равно единице.* (А. Храбров)

Решение. Если a при делении на 4 дает 3, на доске вообще нет целых чисел, потому что квадраты при делении на 4 могут давать только остатки 0 или 1. В этом случае утверждение задачи, очевидно, верно. Дальше считаем, что a дает при делении на 4 остаток 1. Тогда $a = 4p+1$, где $p = \frac{a-1}{4}$ — простое. Заметим, что число $\frac{a-n^2}{4}$ тут является целым тогда и только тогда, когда n нечётно. Поскольку при нечётном n разность $p - \frac{a-n^2}{4} = \frac{n^2-1}{4}$ чётна, все целые числа вида $\frac{a-n^2}{4}$ здесь нечётны.

Пусть для некоторого a условие задачи выполнено, а заключение — нет. Рассмотрим наименьшее такое n, что число $b = \frac{a-n^2}{4}$ — составное. Обозначим через u его наименьший простой делитель. Поскольку $n > \sqrt{a/5}$, выполнено неравенство $b = \frac{a-n^2}{4} < a/5$. Следовательно, $u < \sqrt{\frac{a}{5}} < n$, откуда $-n < n-2u < n$. Поэтому $(n-2u)^2 < n^2$, причём $n-2u$ не равно 0, так как n нечётно. Легко видеть, что число $\frac{a-(n-2u)^2}{4}$ натуральное, делится на u и больше b, то есть оно не простое и не единица, Значит, число $|n-2u|$, меньшее n, также порождает составное натуральное число, что противоречит минимальности n.

Замечание. Условие задачи выполнено, например, для $a = 173$.