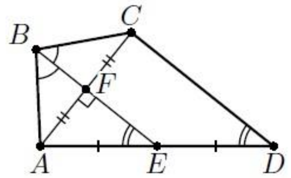
IX МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

5. *На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды все они сели по кругу, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей есть лжец!». Затем они сели по кругу в другом порядке, и каждый сказал: «Среди двух моих соседей нет рыцаря!». Могло ли на острове быть 2017 человек?* (Л. Самойлов)

Ответ. Не могло. **Решение**. В первом круге обоими соседями каждого лжеца были рыцари. Сопоставив каждому лжецу его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не меньше, чем лжецов. В втором круге обоими соседями каждого рыцаря были лжецы. Сопоставив каждому рыцарю его правого соседа в этом круге, убеждаемся, что рыцарей на острове не больше, чем лжецов. Получается, что рыцарей и лжецов на острове поровну. Но тогда на острове чётное число жителей, а число 2017 — нечётное.

6. *В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектриса угла B проходит через середину стороны AD, а $\angle C = \angle A + \angle D$. Найдите угол ACD.* (С. Берлов)



Ответ. $\angle ACD = 90°$. **Решение**. Пусть E — середина стороны AD, а F — точка пересечения BE и AC. Из условия имеем: $\angle B = 360° - 2(\angle A + \angle D)$, откуда $\angle AEB = 180° - \angle A - \angle B/2 = \angle D$. Значит, $BE \parallel CD$, и EF — средняя линия треугольника ACD, то есть $AF = FC$. Таким образом, BF — биссектриса и медиана треугольника ABC, а, значит, и его высота. Следовательно, прямая CD, параллельная BF, также перпендикулярна AC, откуда и вытекает ответ.

7. *Имеется клетчатая доска размером $2n \times 2n$. Петя поставил на неё $(n+1)^2$ фишек. Кот может одним взмахом лапы смахнуть на пол любую одну фишку или две фишки, стоящие в соседних по стороне или углу клетках. За какое наименьшее количество взмахов кот заведомо сможет смахнуть на пол все поставленные Петей фишки?* (С. Берлов, Н. Власова)

Ответ. n^2+n. **Решение**. *Оценка*. Разделим доску на n^2 квадратов 2×2. Кот может смахнуть любые две фишки, стоящие в одном квадрате. Пока фишек на доске больше, чем n^2, у него есть возможность смахнуть две фишки, то есть он сможет сделать это по крайней мере $n+1$ раз (после n таких действий на доске ещё остаётся $n^2+1 > n^2$ фишек). Смахивая оставшиеся фишки поодиночке, кот обойдётся $(n+1)+(n^2-1) = n^2+n$ взмахами. *Пример*. Разобьём доску на квадраты 2×2. Рассмотрим диагональ, идущую из левого нижнего угла в правый верхний. В левый нижний квадрат поставим 4 фишки, а в остальные, которые пересекает эта диагональ — по 3 фишки так, чтобы левая нижняя клеточка осталась пустой. Во все квадраты выше диагонали поставим по одной фишке в левый верхний угол, во все квадраты ниже — в правый нижний угол. Получим ровно $(n^2-n)+3n+1 = (n+1)^2$ фишек. Так как кот не может при данной расстановке фишек одним взмахом сбить фишки из разных квадратов, чтобы сбить все диагональные фишки, необходимо хотя бы $2n$ взмахов, на остальные фишки — n^2-n взмахов, то есть всего — n^2+n взмахов.

8. *На доске написано 100 натуральных чисел, среди которых ровно 33 нечетных. Каждую минуту на доску дописывается сумма всех попарных произведений всех чисел, уже находящихся на ней (например, если на доске были записаны числа 1, 2, 3, 3, то следующим ходом было дописано число $1\cdot2+1\cdot3+1\cdot3+2\cdot3+2\cdot3+3\cdot3$). Можно ли утверждать, что рано или поздно на доске появится число, делящееся на $2^{10000000}$?* (И. Богданов)

Ответ. Можно. **Решение**. Так как на доске написано 33 нечётных числа, в первую минуту будет дописана сумма попарных произведений, среди которых $33\cdot32/2$ нечётных. Значит, дописанное число будет чётным, и на доске останется ровно 33 нечётных числа. Повторяя эти рассуждения, получаем, что на доске в любой момент будет ровно 33 нечётных числа.

Пусть A_n — число, записанное на n-й минуте, а S_n — сумма всех чисел на доске перед дописыванием A_n. По доказанному, число S_n нечётно. Число A_{n+1} отличается от A_n на сумму всех попарных произведений, в которых участвует A_n, то есть на S_nA_n. Итак, $A_{n+1} = A_n+A_nS_n = A_n(1+S_n)$. Поскольку число $1+S_n$ чётно, получаем, что степень двойки, на которую делится A_{n+1}, больше, чем степень двойки, на которую делится A_n. Итак, эта степень возрастает с каждой минутой хотя бы на 1, и через 10000000 минут A_n наверняка будет делиться на $2^{10000000}$.