X олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *Петя загадал натуральное число N, Вася хочет его отгадать. Петя сообщает Васе сумму цифр числа N+1, затем сумму цифр числа N+2 и т. д. Верно ли, что рано или поздно умный Вася сможет с гарантией установить Петино число?* (М. Дидин)

Ответ. Верно. **Решение**. Пусть $10^k \le N < 10^{k+1}$. Через $10^{k+1}-N$ шагов Петя впервые выпишет единицу, а ещё через $10^{k+2}-10^{k+1} = 9\cdot 10^{k+1}$ шагов он выпишет единицу второй раз. Зная количество шагов между двумя этими событиями, мы найдем k, а зная k и количество шагов до первого события, найдём N.

2. *Найдите наименьшее натуральное k такое, что для некоторого натурального числа a, большего 500 000, , и некоторого натурального числа b выполнено равенство* $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+k}=\frac{1}{b}$. (И. Богданов)

Ответ. $k = 1001$. **Решение**. *Оценка*. Положим $a+k = c$ и НОД$(a, c) = d$. Тогда $a = da_1$, $c = dc_1$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{a_1+c_1}{da_1c_1}$. Так как числа a_1c_1 и a_1+c_1 взаимно просты, d должно делиться на a_1+c_1. Поэтому $d \ge a_1+c_1$ и $d^2 \ge d(a_1+c_1) = a+c > 10^6$, откуда $d \ge 1001$ и $k = d(c_1-a_1) \ge 1001$. *Пример*. $a = 500500$, $k = 1001$: $\frac{1}{500500}+\frac{1}{501501}=\frac{1}{250500}$.

3. *Диагонали выпуклого четырёхугольника ABCD равны и пересекаются в точке K. Внутри треугольников AKD и BKC выбрали точки P и Q соответственно так, что* $\angle KAP = \angle KDP = \angle KBQ = \angle KCQ$. *Докажите, что прямая PQ параллельна биссектрисе угла AKD.* (С. Берлов)

Решение. Так как $\angle KAP = \angle KCQ$, $CQ \parallel AP$. Так как $\angle KDP = \angle KBQ$, $BQ \parallel DP$. Пусть BX и CY — перпендикуляры, опущенные из B и C на DP и AP соответственно. Тогда прямоугольные треугольники BDX и CAY равны по гипотенузе и острому углу, откуда $BX = CY$. Это значит, что расстояния между прямыми CQ и AP и между прямыми BQ и DP равны. Таким образом, прямые AP, BQ, CP и DQ, пересекаясь, образуют ромб $PMQN$, где M — точка пересечения DP и CQ. По свойству ромба $\angle MQP = \angle NQP = \angle MPQ = \angle NPQ$.

Пусть отрезок PQ пересекает диагонали AC и BD в точках U и V соответственно. Тогда $\angle CUQ = \angle MQU-\angle QCA = \angle MPV-\angle PDB = \angle PVD$. Значит, в треугольнике KUV углы при основании UV равны, он равнобедренный, и поэтому внешняя биссектриса его угла K параллельна UV, что и требовалось. Если же $K = U = V$, полученное равенство углов сразу говорит, что PQ — биссектриса угла AKD.

4. *В вершинах правильного 300-угольника расставлены числа от 1 до 300 по одному разу в некотором порядке. Оказалось, что для каждого числа a среди ближайших к нему 15 чисел по часовой стрелке столько же меньших a, сколько и среди 15 ближайших к нему чисел против часовой стрелки. Число, которое больше всех 30 ближайших к нему чисел, назовём* ***огромным***. *Каково наименьшее возможное количество огромных чисел?* (С. Берлов)

Ответ. 10. **Решение**. *Оценка*. Чтобы доказать, что огромных чисел не меньше 10, достаточно доказать, что среди любых 30 стоящих подряд чисел встретится огромное. Действительно, пусть это не так. Тогда рассмотрим самое большое из этих 30 чисел. С одной из сторон от него все 15 ближайших чисел будут входить в эту тридцатку, а значит, будут меньше него. Но тогда по условию и 15 ближайших чисел с другой стороны от него будут меньше него, т. е. оно будет огромным. Противоречие. *Пример*. Все числа, заканчивающиеся на 0, расставим в таком порядке: 300, 280, 260, 240, ..., 20, 290, 270, 250, ..., 10. За ними в подобном же порядке расставим числа, заканчивающиеся на 1: 291, 271, ... ,11, 281, ..., 1, затем аналогично расставим числа, оканчивающиеся на 2, и т. д. пока круг не замкнётся. Нетрудно убедиться, что все условия будут выполнены, а огромными будут только числа от 291 до 300.