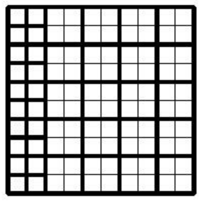
X МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *Разбейте какой-нибудь клетчатый квадрат на клетчатые квадратики так, чтобы не все квадратики были одинаковы, но квадратиков каждого размера было одно и то же количество.* (Методкомиссия)



Решение. Вот один из многих способов сделать это: разрежем квадрат со стороной 10 на 25 равных квадратов, а потом выберем из полученных квадратов любые пять и разрежем каждый из них на 4 равных квадрата. Получится 20 квадратов со стороной 2 и 20 квадратов со стороной 1.

Критерии. Для *7 баллов* достаточно одного верного примера.

2. *Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин? Найдите все возможности.* (С. Берлов)

Ответ. 0. **Решение**. Пусть даны числа a и b. Преобразуем данную в условии сумму четырёх чисел: $0=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{b-1}=\frac{2a}{a^2-1}+\frac{2b}{b^2-1}$. Положим $x=\frac{a}{a^2-1}=-\frac{b}{b^2-1}$. Тогда

$$a-\frac{1}{a}+b-\frac{1}{b}=\frac{a^2-1}{a}+\frac{b^2-1}{b}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0.$$

Критерии. Получено равенство $\frac{a}{a^2-1}+\frac{b}{b^2-1}=0$, дальнейшего продвижения нет: *1 балл*.

3. *По кругу сидят 100 человек. Некоторые из них — рыцари, всегда говорящие правду, остальные — лжецы, которые всегда лгут. Для некоторого натурального числа k < 100 каждый из сидящих произнёс фразу: «Следующие k людей, сидящих за мной по часовой стрелке — лжецы». Чему могло быть равно число k?* (С. Берлов)

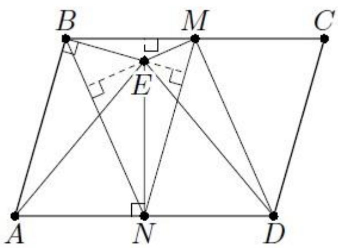
Ответ. Любому из делителей числа 100, кроме 1, уменьшенному на 1: 1, 3, 4, 9, 19, 24, 49, 99. **Решение**. Если бы все сидящие были лжецами, все они сказали бы правду. Значит, среди них есть рыцарь. После него сидят k лжецов. У того из них, который сидит рядом с рыцарем, следующие k–1 человек — лжецы, и так как он лжёт, то k-ый по счёту после него — рыцарь. Рассуждая таким образом дальше, убеждаемся, что между двумя последовательными рыцарями за столом сидят k лжецов. Таким образом, все сидящие за столом разбиваются на группы по k+1 человеку, и потому 100 должно делиться на k+1. Обратно, если 100 делится на k+1, рассадка людей за столом группами из рыцаря и k сидящих за ним лжецов удовлетворяет условиям задачи.

Критерии. Полный ответ с примерами (явно описанными или очевидным образом вытекающими из проведённых рассуждений) рассадки для всех случаев: *3 балла*, обоснование отсутствия других ответов оценивается *из 4 баллов*, оценки за ответ и обоснование суммируются.

При верном ходе рассуждений потерян один ответ: *снимаются 2 балла*.

Потеряно больше одного ответа, есть примеры для отдельных случаев: *1 балл*.

4. *Внутри параллелограмма ABCD выбрана точка E так, что AE = DE и $\angle ABE = 90°$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.* (А. Кузнецов)



Ответ. 90°. **Решение**. Обозначим через N середину отрезка AD. Поскольку треугольник AED равнобедренный, $EN \perp AD$. Так как $AB \parallel MN$ и $\angle ABE = 90°$, то $BE \perp MN$. Таким образом, E — точка пересечения высот треугольника BMN. Значит, $ME \perp BN$. Так как $BMDN$ — параллелограмм, $BN \parallel DM$, откуда $\angle DME = 90°$.

5. *В Тридесятом царстве из каждого города выходит по 30 дорог, причём каждая дорога соединяет два города, не проходя через другие города. Тридесятый царь захотел разместить в некоторых городах по дорожно-эксплуатационному управлению (ДЭУ), обслуживающему все выходящие из города дороги, так, чтобы каждая дорога обслуживалась хотя бы одним управлением и управления стояли не более чем в половине городов. Может ли так оказаться, что у царя существует ровно 2018 способов сделать это?* (С. Берлов, И. Богданов)

Ответ. Не может. **Решение**. Если желание царя невыполнимо, то всё уже доказано. Далее считаем, что оно выполнимо. Возьмём любое удовлетворяющее требованиям царя размещение ДЭУ. Пусть S — общее число дорог в царстве. Так как каждая дорога соединяет два города, число городов в царстве равно $2S/30$. Поэтому управлений должно быть не более, чем $S/30$. С другой стороны, так как каждое управление обслуживает 30 дорог, управлений должно быть не менее, чем $S/30$. Поэтому их ровно $S/30$, откуда следует, что *каждая дорога обслуживается ровно одним управлением и управления находятся ровно в половине городов*.

Закроем все ДЭУ в городах, где они есть, и откроем ДЭУ в каждом городе, где его не было. Тогда по-прежнему у каждой дороги один конец будет в городе с ДЭУ, а другой — в городе без ДЭУ, то есть каждая дорога будет обслуживаться ровно одним управлением, причём, как было доказано выше, городов с ДЭУ будет ровно половина. Очевидно, если проделать описанную процедуру второй раз, получится исходное расположение ДЭУ. Таким образом, все способы размещения ДЭУ разбиваются на пары.

Заметим теперь, что создание ДЭУ в одном городе однозначно определяет наличие или отсутствие ДЭУ во всех городах, в которые из него можно проехать по дорогам, так как на любом пути города с ДЭУ и без ДЭУ должны чередоваться. Поэтому если в царстве можно добраться от любого города до любого, то существует ровно два способа разместить ДЭУ. В противном случае царство можно разбить на графства так, что в каждом графстве от любого города можно добраться до любого, а между графствами дорог нет. В каждом графстве можно выбрать один из двух способов размещения ДЭУ независимо от остальных, и потому если графств n, ДЭУ можно разместить 2^n способами. Так как число 2018 не является степенью двойки, то ровно 2018 способов разместить ДЭУ быть не может.

Критерии. Доказано только, что ДЭУ должны находиться ровно в половине городов: *1 балл*.

Доказана чётность числа способов размещения, дальнейшего продвижения нет: *3 балла*.