XI МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
3 (заключительный) этап, 25-28 марта 2019 г.

Первый день.

1. Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?

2. Устройство КК42 работает так: если положить в него четыре шарика, то в первый лоток вывалится второй по весу шарик (т. е. шарик веса b, если $a > b > c > d$), а во второй лоток вывалятся остальные. С другим числом шариков устройство не работает. Имеются 100 одинаковых на вид шариков попарно различных весов. Их пронумеровали числами 1, 2, ..., 100. Как, использовав прибор не более 100 раз, найти самый тяжелый шарик?

3. Дано 1000-значное число без нулей в записи. Докажите, что из этого числа можно вычеркнуть несколько (возможно, ни одной) последних цифр так, чтобы получившееся число не было натуральной степенью числа, меньшего 500.

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABSC$. На диагонали BC выбрана точка P так, что $AP = CP > BP$. Точка Q симметрична точке P относительно середины диагонали BC, а точка R симметрична точке Q относительно прямой AC. Оказалось, что $\angle SAB = \angle QAC$ и $\angle SBC = \angle BAC$. Докажите, что $SA = SR$.