XII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий первого дня.

1. *На доске написано четыре положительных числа. Докажите, что какие-то два из них отличаются меньше, чем на треть суммы двух остальных.* (С. Берлов)

Решение. Пронумеруем написанные числа по возрастанию: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$. Если $a_2-a_1 < (a_3+a_4)/3$, то все доказано. В противном случае $a_2 > a_2-a_1 \ge (a_3+a_4)/3 \ge 2a_3/3$, откуда $a_3-a_2 < a_3/3 \le a_4/3 < (a_4+a_1)/3$.

2. *В лагерь приехали 99 школьников, причём все приехавшие имеют одно и то же ненулевое количество знакомых среди остальных. Группу ребят, обладающую тем свойством, что любой из приехавших, не входящий в эту группу, знаком с кем-то из этой группы, будем называть популярной. Докажите, что из любой популярной группы, содержащей более 49 ребят, можно выбрать популярную группу, содержащую ровно 49 ребят.* (С. Берлов)

Решение. Докажем, что из любой популярной группы, состоящей более, чем из 49 ребят, можно кого-то удалить так, что группа останется популярной. Пусть все приехавшие имеют ровно по k знакомых. Рассмотрим какую-то популярную группу A, в которую входит не менее 50 школьников. Будем считать, что все остальные школьники входят в группу B. Предположим, что при удалении из A любого школьника она перестаёт быть популярной. Тогда школьники из этой группы делятся на тех, для каждого из которых найдётся кто-то из B, знакомый только с ним — назовём эту группу A_1 — и остальных, которые знакомы только со школьниками из B (и потому, попав после удаления из группы A в группу B, оказываются незнакомы ни с кем из A) — назовём эту группу A_2. Каждому школьнику из группы A_1 сопоставим одного школьника из B, который знаком только с этим школьником из A_1. Они образуют группу B_1. Пусть остальные школьники из B образуют группу B_2. Пусть $|X|$ означает число элементов во множестве X. Все школьники из A суммарно имеют не менее $|A_1|+k|A_2|$ знакомств в B. С другой стороны, школьники из B суммарно имеют не более $|B_1|+k|B_2|$ знакомств в A. Значит, $|A_1|+k|A_2| \le |B_1|+k|B_2|$ Но поскольку $|A_1| = |B_1|$, а $|A_2| \ge 50-|A_1| > 49-|B_1| = |B_2|$, получаем, что $|A_1|+k|A_2| > |B_1|+k|B_2|$ — противоречие.

3. *Дан треугольник ABC, в котором $2\angle B - \angle A = 180°$. Внутри него выбрана точка K, а на его стороне AB — точка $L \ne B$ так, что $\angle ACK = 2\angle BCK$ и $BK = KL$. Докажите, что $CK+AL = AC$.* (И. Богданов)

Решение. Обозначим $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 3\gamma$, $\angle B = \pi-\beta$. Тогда из условия вытекает, что $\beta = 2\alpha+3\gamma = 90°-\alpha$, откуда $\alpha+\gamma = 30°$, $\beta-\gamma = 60°$ и $\alpha+\beta = 90°$.

Отложим на луче AB такой отрезок AP, что $AP = AC$. Достаточно доказать, что $CK = PL$. Опустим перпендикуляры: CH — на AP, KT — на CH, KM — на AB. Заметим, что $\angle CPB = 90°-\alpha = \beta = \angle PBC$, откуда $PH = BH$. Кроме того, из равенства $BK = KL$ следует, что $LM = MB$. Поэтому $KT = MH = LP/2$. Заметим теперь, что $\angle KCB = \angle C/3 = \gamma$, и потому $\angle KCT = \gamma+\alpha = 30°$, откуда $CK = 2KT = PL$, что и требовалось доказать.

4. *Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k < 2020$) удовлетворяют такому условию: для любого из них можно выбрать из остальных чисел одно или несколько так, чтобы сумма их 1024-ых степеней делилась на его 1024-ую степень. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.* (С. Кудря)

Решение. Заметим прежде всего, что чисел, меньших числа $2^{11} = 2048$ и взаимно простых с ним ровно 1024, поэтому по теореме Эйлера 1024-ая степень нечетного числа при делении на 2048 дает остаток 1. Пусть среди наших чисел есть четное число a_i. Тогда его 1024-ая степень делится на 2^{11}. Поскольку единицами в количестве, не большем $k < 2020 < 2^{11}$, число, делящееся на 2^{11}, не набрать, числа, сумма 1024-ых степеней которых делится на 1024-ую степень числа a_i, все четны. Тогда мы можем удалить из нашего набора все нечетные числа, а все четные разделить на 2. Получится новый набор менее чем из 2020 чисел, удовлетворяющий условию, причем максимальное число набора при этом уменьшилось. После нескольких таких операций придем к набору, где все числа нечетны.

Пусть сумма 1024-ых степеней m нечетных чисел делится на 1024-ю степень еще одного нечетного числа. Обозначим частное через n. Поскольку все 1024-ые степени дают остаток 1 при делении 2^{11}, получаем, что $m-n$ должно делиться на 2^{11}. Поскольку $m < 2^{11}$, имеем $n \ge m$. Тогда выберем из наших чисел наибольшее, и если оно не равно никакому из остальных, получим противоречие, ибо частное n будет меньше числа слагаемых m.