XII олимпиада имени Леонарда Эйлера, заключительный этап

Решения заданий второго дня.

5. *Сумма дробных частей нескольких положительных чисел равна целой части их произведения. Докажите, что дробная часть суммы этих чисел равна произведению их целых частей. Напомним, что целая часть [x] числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x (например [1,3] = 1), а дробная часть {x} числа x задается формулой {x} = x–[x].* (М. Дидин)

Решение. Если дробная часть числа равна целому числу, то это 0. Значит, надо доказать, что сумма наших чисел — целое число и произведение их целых частей равно 0. Первое очевидно, так как по условию сумма дробных частей наших чисел — целое число. Допустим, второе неверно. Тогда у всех наших чисел $x_1, \ldots, x_n$ целые части не меньше 1, и мы меем

$$x_1\cdot\ldots\cdot x_n = ([x_1]+\{x_1\})\ldots([x_n]+\{x_n\}) \geq [x_1]\cdot\ldots\cdot[x_n]+\{x_1\}[x_2]\cdot\ldots\cdot [x_n]+\ldots+[x_1][x_2]\cdot\ldots\cdot\{x_n\}+\ldots \geq 1+\{x_1\}+\ldots+\{x_n\},$$

откуда $x_1\cdot\ldots\cdot x_n \geq 1+[x_1\cdot\ldots\cdot x_n]$, что невозможно.

6. *На каждой стороне выпуклого 100-угольника отметили по две точки, делящие эту сторону на три равные части. После этого всё, кроме отмеченных точек, стерли. Докажите, что по отмеченным точкам можно однозначно восстановить исходный 100-угольник.* (С. Берлов)

Решение. Допустим, есть выпуклый 100-угольник M, отличный от стертого 100-угольника N, у которого набор отмеченных точек такой же. Пусть на сторонах AB, BC и CD многоугольника N отмечены точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, идущие от A к D в указанном порядке. Тогда на стороне UV 100-угольника M, на которой лежит точка A_2, должна лежать и точка B_1 — иначе отмеченные точки будут находиться по обе стороны от прямой UV, что противоречит выпуклости 100-угольника M. Таким образом, стороны 100-угольника M лежат на прямых, соединяющих отмеченные точки 100-угольника N, соседние с его вершинами.

Пусть VW — следующая за UV сторона 100-угольника M. На ней лежат отмеченные точки B_2 и C_1. Так как точка пересечения B_1 диагоналей четырехугольника A_2BVB_2 делит их пополам, прямые A_2B и VB_2, то есть AB и VW, параллельны. Аналогично, прямая VW параллельна стороне DE 100-угольника N, идущей после CD. Получается, что $AB \parallel DE$, то есть каждая сторона 100-угольника N параллельна двум сторонам, располагающимся через две от нее. Но у выпуклого многоугольника не может быть трех параллельных сторон. Противоречие.

7. *Дано натуральное число n. Множество A, составленное из натуральных чисел, таково, что для любого натурального числа m, не превосходящего n, во множестве A есть число, делящееся на m. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех элементов множества A?* (А. Кузнецов)

Ответ. $(k+1)+(k+2)+\ldots+(2k+1) = (k+1)(3k+2)/2$ при $n = 2k+1$ и $(k+1)+\ldots+2k = k(3k+1)/2$ при $n = 2k$.

Решение. *Пример*. Искомое множество образуют слагаемые, указанные в ответе.

Оценка. Лемма. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < 2a_1$. Тогда НОК чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ не меньше их суммы. Доказательство. Пусть НОК чисел $a_1, \ldots, a_k$ есть $M = a_1n_1 = a_2n_2 = \ldots = a_kn_k$. Тогда $2n_k > n_1 > n_2 > \ldots > n_k$. Следовательно, $2n_k–n_k \geq k$ и $M \geq ka_k \geq a_1+\ldots+a_k$.

Пусть теперь A — множество, удовлетворяющее условиям задачи. Каждому натуральному числу из указанных в ответе сопоставим одно из делящихся на него чисел множества A. Тогда каждое число из A делится на НОК всех сопоставленных ему чисел, и, стало быть, не меньше суммы этих чисел, а сумма всех чисел из A — не меньше суммы, указанной в ответе.

8. *В языке племени УЫ всего две буквы: «У» и «Ы». Словом считается любая последовательность из 2n букв У и 2n букв Ы (число n дано и фиксировано). Языковеды называют слова похожими, если одно можно получить из другого* ***одной*** *перестановкой двух соседних букв У и Ы. Какое наибольшее количество слов можно выписать на доску так, чтобы любые два из выписанных слов не были похожи? В записи ответа допустимы только четыре арифметические операции, возведение в степень, взятие факториала и стандартных комбинаторных величин, там не должно содержаться многоточий и число использованных операций не должно зависеть от n.* (Д. Белов, И. Богданов)

Ответ. $\dfrac{C_{4n}^{2n}-C_{2n}^{n}}{2}+C_{2n}^{n}=\dfrac{C_{4n}^{2n}+C_{2n}^{n}}{2}$. **Решение**. *Оценка*. Всего имеется C_{4n}^{2n} слов: по числу размещений $2n$ букв «У» по $4n$ местам. Разобьём каждое слово на блоки по 2 символа. Если есть хотя бы один блок из разных букв, назовём самый левый такой блок *вариативным*. Назовём два слова *идентичными*, если они совпадают везде, кроме общего вариативного блока. В наборе попарно непохожих слов не может быть двух идентичных. Все слова разбиваются на пары идентичных, кроме слов, в которых каждый блок состоит из двух одинаковых букв (назовём их *уникальными* и заметим, что их C_{2n}^{n}). Отсюда и следует оценка.

Пример. Выберем все слова, где сумма мест, на которых стоит буква «У», имеет ту же чётность, что и n. Они, очевидно, попарно непохожи. С другой стороны, в любой паре идентичных слов ровно одно выбрано, и все уникальные тоже выбраны. Поэтому на этом наборе оценка достигается.