XII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *Сумму цифр шестизначного числа умножили на произведение его цифр. Получилось 390. Найдите хотя бы одно такое шестизначное число.* (И. Рубанов)

Решение. $390 = 2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}13$. Явным кандидатом на роль суммы цифр является простое число 13. И действительно, $13 = 2+3+5+1+1+1$. Поэтому подойдет любое шестизначное число, в записи которого есть по одной двойке, тройке и пятерке и три единицы, например, 111235.

2. *На доске написано n целых чисел, любые два из которых отличаются хотя бы на 3. Сумма квадратов двух наибольших из них меньше 500. Сумма квадратов двух наименьших из них также меньше 500. При каком наибольшем n это возможно?* (Р. Женодаров, С. Берлов)

Ответ. При $n = 12$. **Решение**. *Оценка*. Рассмотрим второе по величине число. Если оно не меньше 15, то самое большое число не меньше 18, и сумма квадратов двух наибольших чисел не меньше, чем $15^2+18^2 = 549 > 500$, что невозможно. Поэтому второе по величине число не превосходит 14. Аналогично второе с конца число не меньше, чем -14. Таким образом, все искомые числа, кроме, может быть, наибольшего и наименьшего, не больше 14 и не меньше -14. Так как $14-(-14) = 28 < 3{\cdot}10$, написанные на доске числа разбивают отрезок числовой оси между -14 и 14 не более чем на 9 частей, то есть всего между -14 и 14 не более 8 наших чисел. Так как это все наши числа, кроме, может быть, двух наибольших и двух наименьших, всего на доске написано не более 12 чисел. *Пример*. $-17, -14, -11, -8, -5, -2, 2, 5, 8, 11, 14, 17$.

3. *Биссектриса угла A выпуклого четырёхугольника ABCD пересекает сторону CD в точке K. Оказалось, что $DK = BC$ и $KC+AB = AD$. Докажите, что $\angle BCD = \angle ADC$.* (С. Берлов)

Решение. Пусть точка D' симметрична D относительно прямой AK. Тогда $BC = DK = D'K$ и $KC = AD-AB = AD'-AB = BD'$, откуда следует равенство треугольников $BD'K$ и BCK по трём сторонам. Тогда $\angle BCK = \angle BD'K = \angle AD'K = \angle ADK = \angle ADC$.

4. *На полуокружности расположено 50 точек. Любые две точки, между которыми не более 9 других точек, соединены отрезком.* ***Степенью точки*** *назовём количество отрезков, выходящих из неё. Панда и Вомбат играют в игру. Ходят по очереди, начинает Панда. Панда своим ходом может стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых чётна. Вомбат может своим ходом стереть один отрезок, соединяющий точки, сумма степеней которых нечётна. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из зверей выиграет при правильной игре?* (С. Берлов)

Ответ. Панда. **Решение**. Если Панда не может сделать ход, то любой отрезок соединяет вершину четной и нечетной степени. В этом случае количество отрезков равняется сумме степеней точек с четной степенью, следовательно, обязательно делится на два. Посчитаем (последовательно, начиная с крайней точки) сколько отрезков было изначально: $(10+11+\ldots+18+19+30{\cdot}20+19+18+\ldots+11+10)/2 = 10{\cdot}29/2+30{\cdot}10$, что не делится на 2. Так как за один ход количество отрезков уменьшается ровно на 1, перед ходом Панды всегда будет нечетное число отрезков. Следовательно, Панда всегда может сделать ход. Очевидно, игра закончится, поэтому Панда победит.

5. *Замкнутая ломаная состоит из 1001 звена и такова, что никакие три ее вершины не лежат на одной прямой. Известно, что каждое ее звено, кроме, может быть, двух, пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов. Верно ли, что каждое из двух оставшихся звеньев тоже пересекает все 998 звеньев, не имеющих с ним общих концов?* (Р. Женодаров, О. Дмитриев, жюри)

Ответ. Верно. **Решение**. Назовём два звена, названных в условии, *особыми*. По условию с каждым особым звеном пересекаются все не соседние с ним не особые. Поэтому достаточно доказать, что, если особые рёбра (назовём их p и q) не соседние, то они пересекаются. Если это не так, то одно из них (скажем, p) не пересекает *прямую*, содержащую другое (*). Пусть наша ломаная — это $A_1A_2\ldots A_{1001}$, где A_1A_2 — ребро q. Пусть ребро p — это A_kA_{k+1}.

Поскольку рёбра A_1A_{1001} и A_2A_3 — не особые, они пересекаются. Значит, точки A_{1001} и A_3 лежат в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_2. Далее, каждое ребро A_iA_{i+1}, где $i \neq k$ и $3 \leq i \leq 999$, пересекает A_1A_2, то есть точки A_i и A_{i+1} лежат в разных полуплоскостях относительно A_1A_2. Поскольку точки A_3 и A_{1001} лежат в одной полуплоскости (и число 1001 нечётно), отсюда следует, что все точки A_i с нечётными i лежат в той же полуплоскости, а с чётными i — в другой. Но тогда точки A_k и A_{k+1} лежат в разных полуплоскостях относительно A_1A_2, что противоречит нашему предположению (*).