XII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. *Петя и Вася стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Васи вдвое больше скорости Пети. Петя все время бежит против часовой стрелки, а Вася может менять направление бега, если он перед этим пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Вася может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним.* (И. Рубанов)

Решение. Поделим дорожку на шесть равных частей последовательными точками A_1, ..., A_6 так, чтобы бегуны стартовали из точки A_1 в направлении A_2. Добежав до A_4, Вася поворачивает и в точке A_3 впервые встречает Петю. Затем Вася продолжает бежать по часовой стрелке, пока не встретит Петю во второй раз в точке A_5. Пробежав еще по часовой стрелке не дальше точки A_4, Вася поворачивает (он имеет на это право, так как перед этим пробежал по часовой стрелке более половины дорожки) и обгоняет Петю не позже, чем тот добежит до финиша, так как Пете после второй встречи осталось бежать до точки A_1 треть круга, а Васе — не более двух третей круга.

7. *Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт, после чего зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа 1, 2, 3, ..., 2019 (в некотором порядке, не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально?* (Р. Женодаров, О. Дмитриев)

Ответ. 1010. **Решение**. *Оценка*. Присвоим хамелеону, высказавшемуся первым, номер 1, высказавшемуся вторым — номер 2 и т.д. Разобьем хамелеонов на пары: 1 с 2, 3 с 4, …, 2017 с 2018. Получим 1009 пар и одиночного хамелеона 2019. Оба хамелеона из одной пары не могут быть зелеными, так как тогда они назвали бы одинаковые числа. Поэтому зеленых хамелеонов не более 1010. *Пример*. Пусть все нечетные хамелеоны — зеленые, четные — коричневые. Первый говорит — 1010, второй — 1 и становится зеленым. Тогда третий говорит — 1011, четвертый — 2 и т. д. Нечетные произнесут все числа от 1010 до 2019, а четные — от 1 до 1009.

8. *Можно ли отметить в ряду всех натуральных чисел бесконечно много чисел так, чтобы разность любых двух отмеченных чисел (где из большего вычитается меньшее) была квадратом натурального числа?* (А. Голованов)

Ответ. Нельзя. **Решение**. Пусть так отметить числа можно. Пронумеруем отмеченные числа в порядке возрастания: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Положим $b_n = a_{n+1}-a_n$. По условию в последовательности $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ любое число является квадратом натурального числа. Кроме того, квадратом является любая сумма $b_k+b_{k+1}+\ldots+b_n = a_{n+1}-a_k$. Пусть $b_2+\ldots+b_n = (c_n)^2$. Очевидно, $c_1 < c_2 < \ldots < c_n < \ldots$. Поэтому найдется такое n, что $2c_n+1 > b_1$. Сумма $b_1+b_2+\ldots+b_n$ должна быть квадратом некоторого натурального числа d. При этом $d^2 > (c_n)^2$, откуда $d^2 \geq (c_n+1)^2 = (c_n)^2+2c_n+1 > (c_n)^2+b_1 = d^2$. Противоречие.

9. *В строку выписано 1999 натуральных чисел. Во вторую строку под каждыми двумя соседними числами выписали их наибольший общий делитель. Аналогичным образом получили третью, четвёртую и т. д. строки. Может ли 1000-я строка состоять из 1000 последовательных чисел в некотором порядке?* (С. Берлов)

Ответ. Не может. **Решение**. Назовем число a из таблицы *предком* числа b, если от a до b можно добраться сверху вниз по цепочке описанных в условии наибольших общих делителей (НОД). Двигаясь по строкам снизу вверх, нетрудно убедиться, что у каждого числа a из 1000-ой строки 1001 предок из первой строки, все эти предки идут в строке подряд, и a равно их НОД. Пусть числа a и b из 1000-ой строки делятся на простое число p. Тогда делятся на p и все предки каждого из них. Если число c записано в 1000-ой строке между a и b, то каждый его предок является также предком либо a, либо b. Поэтому c также делится на p. Но среди 1000 последовательных чисел найдутся числа, дающие при делении на 30 остатки 6, 10 и 15, которые, в силу доказанного, не могут стоять ни в каком порядке, так как любые два из них делятся на простое число, на которое не делится третье.

10. *На средней линии равностороннего треугольника ABC, параллельной стороне BC, взята точка D. Точка E на продолжении стороны BA за точку A такова, что $\angle ECA = \angle DCA$. Точка F на продолжении стороны CA за точку A такова, что $\angle FBA = \angle DBA$. Докажите, что точка A лежит на средней линии треугольника DEF, параллельной стороне EF.* (А. Кузнецов)

Решение. Обозначим через P и Q середины сторон AB и AC, а через M и N — точки, в которых DE и DF пересекают стороны AC и AB соответственно. Тогда треугольник DPB будет подобен треугольнику FAB по двум углам ($\angle DBP = \angle FBA$ по условию, $\angle BPD = \angle BAF = 120°$) с коэффициентом 2, поскольку $AB = 2PB$. Тогда по свойству биссектрисы $DN/NF = DB/BF = 1/2$. Аналогично $DM/ME = 1/2$. Следовательно, $S_{\Delta FAE} = 2S_{\Delta FDA}$ (так как сторона AF у треугольников общая, а отношение опущенных на нее высот равно $DM/ME = 1/2$) и, аналогично, $S_{\Delta FAE} = 2S_{\Delta EDA}$, откуда $S_{\Delta FDE} = 2S_{\Delta FAE}$, и потому высота из вершины A на EF вдвое меньше высоты из вершины D на EF, откуда и вытекает утверждение задачи.