

ХІІІ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 1 день

1. Прямые $y = ax+b$, $y = bx+c$, $y = cx+d$, $y = dx+a$ ограничивают квадрат. Чему может равняться площадь этого квадрата (укажите все возможности)? (И. Рубанов)

Ответ. 2. Решение. Данные в условии прямые разбиваются на две пары параллельных. Поэтому либо 1) $a = b$ и $c = d$, либо 2) $a = c$ и $b = d$, либо 3) $a = d$ и $b = c$.

В первом случае квадрат ограничен прямыми $y = ax+a$, $y = ax+c$, $y = cx+c$, $y = cx+a$. Прямая $y = ax+a$ пересекается с прямыми $y = cx+c$ и $y = cx+a$ в точках $M(-1, 0)$ и $N(0, a)$, а прямая $y = ax+c$ — в точках $Q(0, c)$ и $P(1, a+c)$. Так как точки M и P лежат с разных сторон от прямой NQ , отрезки MP и NQ являются диагоналями квадрата. Следовательно, вершины квадрата, идут в порядке $MNPQ$, а точка P лежит на оси абсцисс, то есть имеет координаты $(1, 0)$, откуда $PM = 2$. Осталось заметить, что в случае $a = 1$, $c = -1$ $MNPQ$ — действительно квадрат площади $PM^2/2 = 2$.

Третий случай аналогичен первому, а второй невозможен, так как тогда прямые $y = ax+b$ и $y = cx+d$ совпадают.

2. Кощей Бессмертный открыл счет в банке «Спёрбанк». Изначально на счете было 0 рублей. В первый день Кощей кладёт на счёт k ($k > 0$) рублей, а каждый следующий день добавляет туда на один рубль больше, чем накануне (на второй день он добавляет $k+1$ рублей, на третий — $k+2$ рубля и т. д.) Каждый раз сразу после того, как Кощей вносит деньги на счёт, общая величина счёта уменьшается банком в два раза. Найдите все такие k , при которых сумма на счёте всегда будет выражаться целым числом рублей. (С. Берлов)

Ответ. 2. Решение. Покажем по индукции, что если Кощей в первый день внес 2 рубля, то на n -ый день у него на счету будет n рублей. База $n = 1$: на первый день два внесённых Кощеем рубля стараниями Спёрбанка тут же превратились в 1 рубль. Пусть на n -ый день на счету у Кощей оказалось n рублей. Добавив на $(n+1)$ -ый день $n+2$ рубля, Кощей получит на счету $(n+n+2)/2 = n+1$ рублей, что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что в первый день Кощей внес $2+k$ рублей, где $k \neq 0$. Покажем, что в этом случае у Кощей в n -ый день на счету будет $n+(k/2+k/4+\dots+k/2^n)$ рублей. Из этого будет следовать единственность ответа 2, так как при $n = t+1$, где t — степень, с которой двойка входит в разложение числа k на простые множители, сумма в скобках окажется дробной. База $n = 1$ индукции очевидна. Пусть на n -ый день на счету у Кощей оказалось $n+k/2+k/4+\dots+k/2^n$ рублей. Добавив на $(n+1)$ -ый день $n+2+k$ рублей, Кощей получит на счету $(2n+2+k+k/2+k/4+\dots+k/2^n)/2 = n+1+k/2+k/4+\dots+k/2^{n+1}$ рублей, что и требовалось доказать.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно. Отрезки CP и AQ пересекаются в точке R . Оказалось, что $AR = CR = PR+QR$. Докажите, что из отрезков AP , CQ и PQ можно составить треугольник, один из углов которого равен углу B . (С. Берлов)

Решение. Отметим точки K и L на отрезках CP и AQ соответственно таким образом, чтобы $CK = RP$, а $AL = RQ$. Рассмотрим точку M , симметричную R относительно середины отрезка AC . Нетрудно показать, что четырёхугольники $APKM$ и $CQLM$ — параллелограммы, поэтому треугольник LKM — искомый. В самом деле, $MK = AP$, $ML = CQ$, $\angle LMK = \angle ABC$ (так как прямые BA , BC , MK и ML ограничивают параллелограмм), $RL = AR - AL = AR - QR = PR$ и, аналогично, $RK = QR$, откуда $\Delta PRQ = \Delta LRK$ и $LK = PQ$.

4. *Несколько команд сыграли турнир в один круг, причём ничьих не было. Оказалось, что среди любых 100 команд есть команда, выигравшая у всех остальных 99 команд, но нет команды, проигравшей всем остальным 99 командам. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире?* (В. Мигрин, К. Тыщук, Н. Власова)

Ответ. 148. **Решение.** Оценка. Назовём доменом команды совокупность всех команд, у которых она выиграла. Команду, в домене которой не менее 99 команд, назовём доминатором.

Пусть в турнире участвовали n команд. Возьмём любые 100 из них. По условию среди них есть доминатор. Заменим его одной из оставшихся команд. В получившейся сотне снова есть доминатор. Повторяя описанную процедуру, пока не побывавшие в сотне команды не закончатся, убеждаемся, что доминаторов у нас по крайней мере $n - 99$.

Пусть доминатор A имеет домен P с наименьшим числом команд. Покажем, что тогда у команд из P выиграла все доминаторы. В самом деле, пусть есть доминатор B с доменом Q , куда не входит какая-то команда K из P . Тогда в силу минимальности домена P в домене Q есть команда M , не входящая в P . Если $B \neq K$ и $A \neq M$, то в сотне S команд, составленной из A , B , K , M и любых 96 команд из домена P , нет команды, победившей все остальные: такой командой может быть только A или B , но B проиграла K , а A проиграла M . Если $B = K$, дополним S до сотни ещё одной командой из P . Тогда A проиграла M , а B проиграла A . Случай, когда $A = M$, аналогичен, а случай, когда одновременно $B = K$ и $A = M$, невозможен.

Так как в домене P не меньше 99 команд, там есть команда L , проигравшая хотя бы 49 командам из этого домена — иначе суммарное число поражений в матчах команд из P между собой будет меньше суммарного числа побед. Тогда доминаторов не больше 49 — иначе, взяв 50 доминаторов, команду L и 49 победивших её команд из домена P , мы получили бы сотню (так как в домене P в силу доказанного выше нет доминаторов), в которой команда L проиграла всем остальным. Отсюда $n - 99 \leq 49$, то есть $n \leq 148$.

Пример. Разделим 148 команд на 49 доминаторов и 99 доминируемых, проигравших всем доминаторам. Доминируемые команды расположим по кругу, и пусть каждая из них выигрывает у 49 следующих за ней по часовой стрелке и проигрывает остальным. Доминаторов занумеруем от 1 до 49, и пусть в каждом матче между ними побеждает команда с большим номером. Тогда в любой сотне команд будет хотя бы один доминатор, и доминатор с наибольшим номером победит все остальные команды. С другой стороны, в этой сотне будет хотя бы 51 доминируемая команда, и потому каждая из них победит по крайней мере одну из оставшихся, а каждый доминатор победит их все. Таким образом, команды, проигравшей всем остальным, в сотне не будет.