XIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 2 день

5. *Диагонали трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) пересекаются в точке K. Внутри треугольника ABK нашлась такая точка M, что $\angle MBC = \angle MAD$, $\angle MCB = \angle MDA$. Докажите, что прямая MK параллельна основаниям трапеции.* (М. Кунгожин)

Решение. Опустим из точки M перпендикуляры MP и MQ, на прямые AD и BC соответственно. Треугольники MBC и MAD подобны по двум углам. Поэтому $MP/MQ = AD/BC$. Теперь опустим перпендикуляры KR и KS на прямые AD и BC из точки K. Треугольники KBC и KDA также подобны по двум углам, откуда $KR/KS = AD/BC = MP/MQ = m$. Кроме того $MP+MQ = PQ = RS = KR+KS = n$. Тогда из равенств $MP/(n–MP) = m = KR/(n–KR)$ имеем $MP = mn/(m+1) = KR$. Таким образом, $MPRK$ — прямоугольник, откуда и следует утверждение задачи.

6. *Петя, Вася и Толя вернулись с рыбалки, на которой каждый из них поймал некоторое количество рыб (хотя бы одну). После рыбалки они стали хвастаться своими уловами. Петя сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем каждый из остальных!». Вася сказал: «Я поймал рыб не меньше, чем Петя и Толя в сумме!». Толя сказал: «Я поймал на 25% больше рыб, чем Вася!». Позже выяснилось, что каждый из ребят преувеличил свой улов не более, чем в a раз. Какое наименьшее значение могло принимать число a?* (С. Берлов)

Ответ. 1,5. **Решение**. Пусть Петя, Вася и Толя поймали P, V и T рыб соответственно. По условию $aP \geq V \Leftrightarrow P/V \geq 1/a$, $aT \geq 5V/4 \Leftrightarrow T/V \geq 5/4a$. По условию же $aV \geq P+T$, откуда $a \geq P/V+T/V \geq 1/a+5/4a$. Умножив на a, получаем $a^2 \geq 2{,}25$, откуда $a \geq 1{,}5$. Пример, когда подходит $a = 1{,}5$: $P = 4$, $T = 5$, $V = 6$.

7. *При каких натуральных n можно так отметить несколько клеток доски $n \times n$, чтобы во всех строках и столбцах было чётное число отмеченных клеток, а на всех $4n-6$ диагоналях, длина которых больше одной клетки, — нечётное*? (С. Берлов)

Ответ. При всех нечётных n. **Решение**. При нечётном n отметим все клетки верхней и нижней горизонталей, кроме левых угловых. При чётном n будем рассуждать от противного. Раскрасим все клетки в шахматном порядке так, чтобы левый нижний угол был чёрным. Заметим, что среди белых клеток должно быть нечётное число отмеченных, поскольку все они находятся в объединении $n–1$ диагоналей, больших 1 по длине. Но если просуммировать отмеченные клетки во всех вертикалях, начиная со второй слева через одну, а потом добавить к ним сумму всех отмеченных клеток в горизонталях, начиная со второй снизу через одну, то каждую отмеченную белую клетку посчитаем ровно один раз, а каждую отмеченную чёрную — ноль или два раза, т. е. насчитаем нечётное число отмеченных клеток. Но это сумма нескольких чётных чисел. Противоречие.

8. *Дано натуральное число* n. *За одну операцию можно либо вычесть из имеющегося числа любое натуральное число, меньшее его наименьшего простого делителя, либо разделить его на его наименьший простой делитель. Существует ли такое составное* n, *что из него нельзя получить простое число менее, чем за 2021 операцию?* (С. Берлов)

Ответ. Существует. **Решение**. Пусть такого n не существует. Тогда существует такое $m < 2021$, что из каждого натурального числа можно указанными операциями получить простое не более чем за m операций, и есть число k, из которого нельзя получить простое число менее чем за m операций. Будем получать простое число из числа $k!+k$, следя отдельно за судьбой каждого из двух слагаемых. Всякий раз, когда мы вычитаем из суммы число, будем вычитать его из второго слагаемого, сохраняя первое, а на наименьший простой делитель суммы будем делить каждое из слагаемых. Поскольку второе слагаемое с каждой операцией убывает, перед каждой операцией текущее первое слагаемое будет делиться на текущее второе и все меньшие его числа, ибо можно считать, что предыдущими делениями были затронуты только сомножители в $k!$, большие текущего второго слагаемого. Поэтому пока текущее второе слагаемое больше 1, наименьший простой делитель суммы не превосходит наименьшего простого делителя второго слагаемого и потому делит первое слагаемое — а, значит, и второе. Следовательно, наименьший простой делитель суммы равен наименьшему простому делителю второго слагаемого.

Из сказанного следует, что пока текущее второе слагаемое больше 1, то, во-первых, оно при операциях ведет себя так, как будто первого слагаемого нет, и, во-вторых, текущая сумма является составным числом. Следовательно, не позднее момента, когда текущая сумма станет простым числом, текущее второе слагаемое должно обратиться в 1. Такое возможно только в случае, когда на предыдущем шаге второе слагаемое было простым числом. Но это значит, что к моменту превращения второго слагаемого в 1 — и, тем более, к моменту превращения суммы в простое число мы совершили не менее $k+1$ операции. Противоречие.