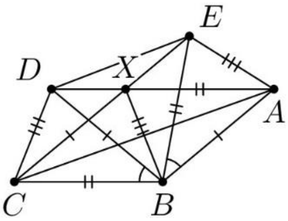
XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий заключительного этапа, 2 день

5. *В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ диагонали AD и CE пересекаются в точке X. Оказалось, что $ABCX$ — параллелограмм и $BD = CX$; $BE = AX$. Докажите, что $AE = CD$.* (С. Берлов)



Первое решение. Заметим, что $AB = CX = BD$; $BC = AX = BE$ и $\angle ABD = 180°–2\angle BAD = 180°–2\angle BCE = \angle CBE$, откуда $\angle ABE = \angle CBD$. Следовательно, треугольники ABE и DBC равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AE = CD$.
Второе решение. Проведем отрезок BX. У трапеции $ABXE$ равны диагонали AX и BE, поэтому она — равнобедренная, то есть $AE = BX$. Аналогично из равнобедренной трапеции $BCDX$ получаем $CD = BX$. Следовательно, $AE = BX = CD$.

6. *Докажите, что для любого целого неотрицательного числа k, не превосходящего $\frac{2022\cdot 2021}{2}$, существуют такие 2022 числа, что все их $\frac{2022\cdot 2021}{2}$ попарные суммы различны и среди этих сумм ровно k положительных.* (И. Рубанов, С. Берлов, Л. Самойлов)

Решение. Для $k = 2022\cdot 2021/2$ возьмём числа 2, 2^2, …, 2^{2022}. Все их попарные суммы различны: если бы выполнялось равенство $2^a+2^b = 2^c+2^d$, то, поделив его на наименьшую из входящих в него степеней двойки, мы получили бы, что чётное число равно нечётному. Пусть теперь $0 \le k < 2022\cdot 2021/2$. Упорядочим все попарные суммы наших степеней двойки по убыванию: $s_1 > s_2 > \ldots > s_{2022\cdot 2021/2}$ — и вычтем из всех этих степеней двойки по $s_{k+1}/2$. Все попарные суммы при этом уменьшатся на s_{k+1}, и положительными останутся в точности первые k сумм.

7. *Положительные числа a, b, c и d не превосходят единицы. Докажите неравенство* $\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} \ge \frac{1}{4} + (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. (А. Храбров)

Решение. Положим $s = (a+b+c+d)/4$ Так как $0 \le a, b, c\ d \le 1$, выполнено неравенство $a^2+b^2+c^2+d^2 \le a+b+c+d$. Далее, верно неравенство $(1–a)(1–b) \le (1–(a+b)/2)^2$, сводящееся после преобразований к очевидному неравенству $0 \le (a–b)^2/4$. Поэтому $(1–a)(1–b)(1–c)(1–d) \le (1–(a+b)/2)^2(1–(c+d)/2)^2 \le (1–s)^4$. Значит, нам достаточно доказать неравенство $1/4s \ge 1/4+(1–s)^4$. После домножения обеих его частей на $4s$, переноса всех выражений в левую часть и вынесения за скобки $1–s$ получаем $(1–s)(4s(1–s)^3–1) \le 0$, что верно, ибо $s \le 1$ и $4s(1–s)^3 = 4s(1–s)(1–s)^2\ 4\cdot(1/4)(1–s)^2 \le 1$.

8. *В кружке 42 человека, любые двое из которых имеют среди кружковцев не менее десяти общих друзей. Докажите, что найдутся двое, имеющие среди кружковцев не менее двенадцати общих друзей.* (М. Антипов)

Решение. Подсчитаем, сколько пар общих знакомых у каждой пары кружковцев, т. е. сколько в графе знакомств существует циклов длины 4 с этими двумя противоположными вершинами. При этом каждый цикл длины 4 будет учтён дважды, поэтому сумма всех полученных результатов подсчёта будет чётна. Допустим, утверждение задачи неверно. Тогда у каждой пары участников кружка либо 10, либо 11 общих знакомых. В первом случае у них будет $10\cdot 9/2 = 45$, а во втором — $11\cdot 10/2 = 55$ пар общих знакомых. При этом всего пар участников кружка имеется $42\cdot 41/2 = 21\cdot 41$, и получается, что сумма всех результатов подсчёта нечётна как сумма нечётного числа нечётных слагаемых. Противоречие.