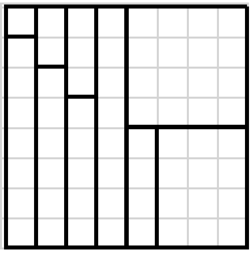
XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день



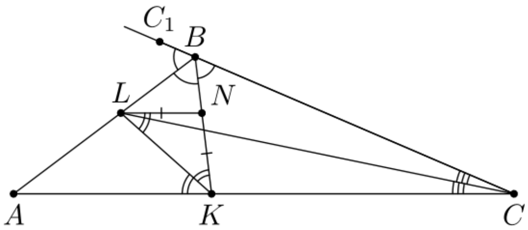
1. *Как без остатка разрезать клетчатый квадрат размером 8x8 клеточек на 10 клетчатых прямоугольников, чтобы все прямоугольники имели различные площади? Все разрезы должны проходить по границам клеточек.* (И. Рубанов)

Решение. Например, так, как показано на рисунке справа.

2. *Учитель придумал ребус, заменив в примере $a+b = c$ на сложение двух натуральных чисел цифры буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные — разными. (например, если $a = 23$, а $b = 528$, то $c = 551$, и получился, с точностью до выбора букв, ребус АБ+ВАГ = ВВД). Оказалось, что по получившемуся ребусу однозначно восстанавливается исходный пример. Найдите наименьшее возможное значение суммы c.* (И. Богданов)

Ответ. 10. **Решение**. Если ребус имеет вид А+Б = АВ, то А = 1, так как А+Б < 20, и Б = 9, так как иначе сумма А+Б — однозначное число. Таким образом, при $c = 10$ по ребусу может однозначно восстанавливаться исходный пример 1+9 = 10. Если же $c < 10$, то ребус имеет вид А+Б = В или А+А = Б. В первом случае нельзя определить, был ли это пример 1+2 = 3 или пример 1+3 = 4, а во втором — пример 1+1 = 2 или пример 2+2 = 4.

3. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы BK и CL. На отрезке BK отмечена точка N так, что $LN \parallel AC$. Оказалось, что $NK = LN$. Найдите величину угла ABC.* (А. Кузнецов)



Ответ. 120°. **Решение**. В равнобедренном треугольнике LNK $\angle KLN = \angle LKN$. Кроме того, равны углы KLN и LKA как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых LN и AC. Таким образом, $\angle KLN = \angle LKA$, то есть луч KL — биссектриса угла AKB. Следовательно, лежащая на нём точка L равноудалена от прямых KA и KB. Кроме того, она равноудалена от прямых $CA = KA$ и CB, так как лежит на биссектрисе угла ACB. Значит, точка L равноудалена от прямых CB и KB, и потому должна лежать на биссектрисе того из углов, образованных этими прямыми, в котором она содержится. Это угол KBC_1, где C_1 — точка на продолжении отрезка CB за точку B, а его биссектрисой должен быть луч $BL = BA$. Отсюда получаем, что $\angle ABC_1 = \angle ABK = \angle CBK$. Так как эти три угла вместе составляют развёрнутый угол, то каждый из них равен 60°, откуда $\angle ABC = \angle ABK + \angle CBK = 120°$.

4. *Числа 1, 2, ..., 1000 разбили на два множества по 500 чисел: красные $k_1, k_2, \ldots, k_{500}$ и синие $s_1, s_2, \ldots, s_{500}$. Докажите, что количество таких пар m и n, у которых разность k_m-s_n дает остаток 7 при делении на 100, равно количеству таких пар m и n, у которых разность s_n-k_m дает остаток 7 при делении на 100. Здесь рассматриваются* ***все*** *возможные разности, в том числе и отрицательные.*

Напомним, что остатком от деления целого числа a на 100 называется разность между числом a и ближайшим числом, не большим a и делящимся на 100. Например, остаток от деления числа 2022 на 100 равен 2022–2000 = 22, а остаток от деления числа –11 на 100 равен –11–(–100) = 89. (Е. Бакаев)

Решение. Выпишем на доске все числа от 1 до 1000, и будем проводить стрелку от числа a к числу b, если разность $a-b$ дает остаток 7 при делении на 100. Тогда в каждое число будет входить 10 стрелок и из каждого числа будет выходить 10 стрелок. Значит, стрелок с синим началом столько же, сколько стрелок с синим концом. Удалим все стрелки, у которых как начало, так и конец синие. Тогда получится, что стрелок с синим началом и красным концом столько же, сколько стрелок с красным началом и синим концом, что и требовалось доказать.

5. *При каком наибольшем n существует выпуклый n-угольник, у которого длины диагоналей принимают не больше двух различных значений?* (И. Рубанов)

Ответ. При $n = 7$. **Решение**. *Пример*. Правильный семиугольник. У него диагонали ровно двух видов: соединяющие вершины через одну и через две. *Оценка*. Пусть AB — сторона выпуклого многоугольника M, у которого есть диагонали только двух возможных длин x и y. Тогда для всякой вершины C, не смежной с A и B, стороны CA и CB треугольника ACB могут равняться только x и y. Выбор длин этих сторон однозначно определяет вершину C, так как она должна лежать с той же стороны от прямой AB, что и весь многоугольник M. Но таких комбинаций сторон есть только четыре: $CA = CB = x$; $CA = CB = y$; $CA = x$, $CB = y$; $CA = y$, $CB = y$. При этом из двух первых комбинаций возможна только одна: иначе соответствующие вершины C_1 и C_2 многоугольника M лежали бы на серединном перпендикуляре к стороне AB, и та из них, которая ближе к AB, оказалась бы внутри треугольника с вершинами в A, B и другой из этих вершин, что противоречит выпуклости M. Таким образом, у многоугольника M не больше трёх вершин, не смежных с вершинами A и B, то есть всего у него не более 7 вершин.